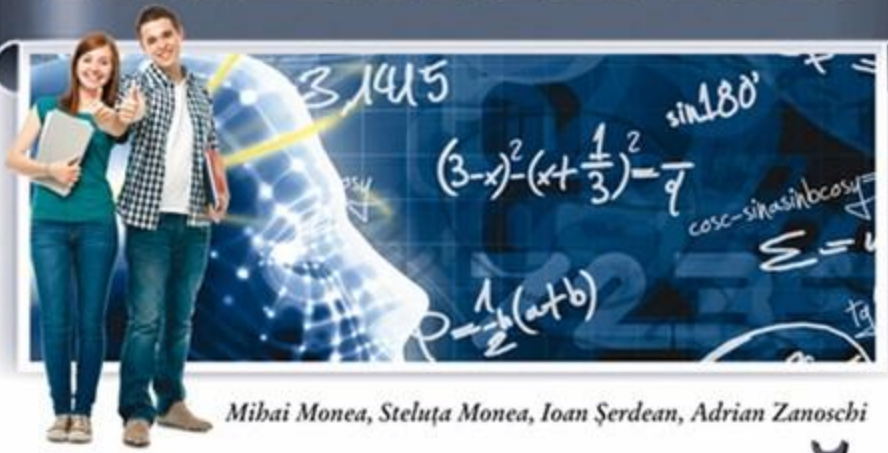
ACTUALIZAT conform Ordin M.E.N. nr. 4430 din 04.09.2014

# BACALAUREAT 2015




*Mihai Monea, Steluța Monea, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi*

# MATEMATICĂ

M_științele-naturii. M_tehnologic

*60 de teste după modelul M.E.N.*

EDITURA PARALELA 45

Lucrare elaborată în conformitate cu programa şcolară pentru Bacalaureat 2015, aprobată prin O.M.E.N. nr. 4430/04.09.2014.

*Programa pentru Bacalaureat 2015. Matematică. M_şt-nat. M_tehnologic poate fi accesată la http://edituraparalela45.ro/titlu_detaliu.php?idtitlu=1639*

*Referent ştiinţific: prof. Cristian Alexandrescu*

Editor: Călin Vlasie

Corectură: autorii
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Prepress: Marius Badea
Coperta colecţiei: Ionuţ Broştianu

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României**
**Bacalaureat 2015 : Matematică : M_Şt-Nat. M_Tehnologic : teme recapitulative : 60 de teste, după modelul M.E.N. /**
Mihai Monea, Steluţa Monea, Ioan Şerdean, Adrian Zanoschi. -
Piteşti : Paralela 45, 2014
Bibliogr.
ISBN 978-973-47-1971-6

I. Monea, Mihai
II. Monea, Steluţa
III. Şerdean, Ioan
IV. Zanoschi, Adrian

51(075.35)(079.1)
371.279.8:373.5

Copyright © Editura Paralela 45, 2014
Prezenta lucrare foloseşte denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conţinutul este protejat de legislaţia privind dreptul de proprietate intelectuală.

Mihai Monea
Steluţa Monea

Ioan Şerdean
Adrian Zanoschi

# Bacalaureat 2015

# Matematică
# *M_şt-nat*
# *M_tehnologic*

Teme recapitulative
60 de teste, după modelul M.E.N.
(10 teste fără soluţii)

PARALELA 45 EDITURA

# Cuvânt-înainte

Examenul de Bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală şi personală, având menirea de a certifica pregătirea ştiinţifică şi competenţele dobândite în liceu, dar şi de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecinţă, performanţa la acest examen, şi îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conţinuturilor, cât şi pentru fixare, sistematizare, recapitulare.

Cartea se adresează celor care pregătesc bacalaureatul la matematică, de tip *M_şt-nat* şi *M_tehnologic*. Lucrarea de faţă îşi propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigenţelor disciplinei şi ale probelor de examen. Considerăm că metoda cea mai bună de a avea o idee clară despre cerinţele unui examen este de a urmări modul în care s-a formulat problematica acelui examen de-a lungul timpului. Din acest motiv, cele mai multe dintre problemele prezente în această carte au fost selectate dintre subiectele şi variantele de bacalaureat ale ultimilor douăzeci de ani (1994-2014).

Trebuie menţionat că această carte este adaptată la forma de organizare a probei de matematică din cadrul examenului menţionat. Elevii profilului ştiinţe ale naturii şi cei ai profilului tehnologic au o programă de examen asemănătoare pentru clasele a XI-a – a XII-a, dar cu diferenţe importante de conţinut pentru clasele a IX-a – a X-a. De aceea, am evidenţiat problemele şi testele specifice doar elevilor de la profilul ştiinţe ale naturii. Astfel, acestea sunt marcate cu semnul „*”.

Cartea are un pronunţat caracter metodic, fiecare paragraf având trei componente: una de iniţiere, una de consolidare şi una de evaluare. Primele patru capitole sunt rezervate antrenamentului specific pentru examen. Problemele sunt grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată în variantele examenelor din anii precedenţi, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Aşadar, un elev îşi poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete şi găseşte în carte un număr suficient de exerciţii cu ajutorul cărora să-şi atingă scopul. Problemele din partea de iniţiere sunt însoţite doar de răspunsuri. Problemele din partea de consolidare sunt însoţite de indicaţii şi răspunsuri, dar şi de soluţii detaliate acolo unde acest lucru se impune. Problemele din partea de evaluare nu au răspunsuri.

Capitolul al cincilea este rezervat testelor. Acestea au o structură specifică examenului de Bacalaureat. Testele sunt dispuse pe trei categorii. Prima categorie este rezervată subiectelor propuse spre rezolvare la proba de matematică a examenului de Bacalaureat în perioada 2009-2014. Ele sunt însoţite de rezolvări complete. A doua categorie este formată dintr-un set de teste propuse după acelaşi model şi care doresc să vină în sprijinul elevilor prin prezentarea unor noi modele de itemi. Aceste teste sunt, de asemenea, însoţite de rezolvări complete. Testele din a treia categorie sunt pentru autotestare şi nu sunt însoţite de rezolvări.

Lucrarea poate fi folosită şi pentru învăţarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiţii reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor şi elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârşitul anului şcolar.

*Autorii*



# Teme recapitulative

# Clasa a IX-a

## 1. Mulţimi şi elemente de logică matematică

### 1.1. Noţiuni teoretice

#### 1.1.1. Elemente de logică matematică

**Definiţie:** Se numeşte **propoziţie** un enunţ despre care ştim care este valoarea sa de adevăr.

| Variabile | Operaţie | Notaţie | Citire | Valoare de adevăr |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | Negaţia | $\neg p$ | non $p$ | Opusă propoziţiei $p$. |
| $p, q$ | Conjuncţia | $p \wedge q$ | $p$ şi $q$ | Este adevărată când propoziţiile $p$ şi $q$ sunt adevărate. |
| $p, q$ | Disjuncţia | $p \vee q$ | $p$ sau $q$ | Este adevărată când cel puţin una dintre propoziţii este adevărată. |
| $p, q$ | Implicaţia | $p \rightarrow q$ | $p$ implică $q$ | Este falsă când $p$ este adevărată şi $q$ falsă. |
| $p, q$ | Echivalenţa | $p \leftrightarrow q$ | $p$ echivalent cu $q$ | Este adevărată când ambele au aceeaşi valoare de adevăr. |

**Definiţie:** Se numeşte **predicat** un enunţ care depinde de una sau mai multe variabile şi care se transformă în propoziţie prin valori date variabilelor.

| Variabile | Operaţie | Notaţie | Citire | Observaţii |
|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | Propoziţia universală | $\forall x, p(x)$ | Pentru orice $x$ are loc $p(x)$. | Demonstrarea valorii de adevăr se face prin calcule cu caracter general şi nu prin exemplu. Un exemplu poate fi suficient pentru a demonstra că această propoziţie este falsă. |
| $p(x)$ | Propoziţia existenţială | $\exists x, p(x)$ | Există $x$ astfel încât are loc $p(x)$. | Demonstrarea valorii de adevăr se realizează prin determinarea unui exemplu. Acesta poate fi chiar ghicit, dar trebuie verificat că este convenabil. |

### 1.1.2. Tipuri speciale de raționament

**Metoda reducerii la absurd:** Pentru a demonstra o implicație de tipul $p \to q$, putem presupune concluzia $p$ ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza construim un raționament care conduce la contradicție.

**Metoda inducției matematice:** Se aplică pentru propoziții universale de forma $\forall n \geq n_0$, $p(n)$. Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k+1$.

### 1.1.3. Mulțimi și cardinale

| Relație sau operație | Notație | Definiție |
|---|---|---|
| Incluziunea | $A \subset B$ | $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$ |
| Egalitatea | $A = B$ | $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A$ |
| Intersecția | $A \cap B$ | $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ |
| Reuniunea | $A \cup B$ | $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ |
| Diferența | $A \setminus B$ | $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ |
| Produsul cartezian | $A \times B$ | $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ |

**Teoremă:** Orice mulțime $A$ cu $n$ elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite $2^n$ submulțimi.

**Definiție:** Pentru o mulțime finită $A$ numim **cardinalul** său și notăm $\text{Card}(A)$ numărul său de elemente.

**Proprietăți:** Sunt adevărate următoarele proprietăți:

**P1.** $\text{Card}(A) = 0$ dacă și numai dacă $A = \emptyset$;

**P2.** Dacă $A \subset B$, atunci $\text{Card}(B - A) = \text{Card}(B) - \text{Card}(A)$;

**P3.** $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

**P4.** $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

### 1.1.4. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

**Definiție:** Numim **modulul** unui număr real $x$ și notăm $|x|$ distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

**Proprietățile modulului:**

**P1.** $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$;

**P4.** $|x| < c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c)$; **P5.** $|x| > c$, $c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty)$;

**P6.** $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ și $|E(x)| = \begin{cases} E(x), & \text{dacă } E(x) \geq 0 \\ -E(x), & \text{dacă } E(x) < 0 \end{cases}$, pentru orice expresie $E(x)$, $x \in \mathbb{R}$;





**P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$; **P8.** $|x^n| = |x|^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$;

**P9.** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$; **P10.** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

**Definiție:** Numim **parte întreagă** a numărului real $x$ și notăm $[x]$ cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu $x$.

**Proprietățile părții întregi:** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

**P1.** $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k+1)$;

**P3.** $[m + x] = m + [x], \forall m \in \mathbb{Z}$; **P4.** $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$.

**Definiție:** Numim **parte fracționară** a numărului real $x$ și notăm $\{x\}$ diferența dintre număr și partea sa întreagă.

**Proprietățile părții fracționare:** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

**P1.** $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; **P2.** $\{x\} \in [0,1)$; **P3.** $\{m + x\} = \{x\}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

## 1.2. Probleme de inițiere

**I1.** Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.

**I2.** Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d, e\}$.

**I3.** Reuniunea a două mulțimi cu câte 2008 elemente fiecare are 3000 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.

**I4.** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției următoare: $p: \left(\sqrt{3}+1\right)^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \in \mathbb{N}$.

**I5.** Fie propozițiile $p: 2 + 2 = 5$ și $q: 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = 5050$. Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$.

**I6.** Determinați numerele reale $a$, $b$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b; a + b] = [1; 7]$.

**I7.** Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (n-1) \cdot (n-2)(n-3) + 4, n \in A\}$.

**I8.** Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.

**I9.** Arătați că numărul $a = 2 \cdot [0,(3) + 0,1(6)]$ este natural.

**I10.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

## 1.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui $A$ care îl conțin pe $d$. *(Variante Bac, 2008)*

**C2.** O mulțime admite 31 de submulțimi nevide. Determinați numărul de elemente ale acestei mulțimi. *(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Două mulțimi cu câte 2008 elemente fiecare au 1000 de elemente comune. Determinați numărul de elemente ale reuniunii lor.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul de submulțimi care conțin simultan pe 1 și pe 3.

*(Variante Bac, 2008)*

**C5.** Considerăm propozițiile $p : 2^5 > 5^2$ și $q : \sqrt{7} > 2$. Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Determinați elementele mulțimii $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Determinați toate valorile reale ale numărului $x$ dacă $2 \in (4x - 2; 2x + 6)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C8.** Elevii unei clase sunt angrenați fiecare într-o activitate sportivă, 12 la volei, iar 25 la fotbal. Știind că 7 dintre ei practică ambele sporturi, determinați numărul de elevi ai clasei.

*(Variante Bac, 2008)*

**C9.** Determinați cel mai mare număr natural al mulțimii $A \setminus B$, dacă $A = [5, 6]$ și $B = [5, 10]$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C10.** Determinați câte elemente întregi conține mulțimea $A \cup B$, unde $A = (-2, 3)$ și $B = (0, 5)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C11.** Ordonați crescător numerele $a = 2{,}010$, $b = 2{,}0(10)$ și $c = 2{,}(010)$.

**C12.** Determinați cardinalul mulțimii $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{2}{x-3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C13.** Fie numărul rațional $\frac{11}{9} = 1,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculați $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{10}$.

**C14.** Fie numărul rațional $\frac{13}{6} = 2,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. De câte ori apare cifra 3 printre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$?

*(Variante Bac, 2004)*

**C15.** Se consideră numărul rațional $\frac{23}{15} = 0,\ a_1a_2\ldots a_n\ldots$. Calculați $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C16.** Determinați cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$, unde $A = (-3, 4]$, iar $B = (1, 5]$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17.** Fie numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media geometrică a numerelor $a$ și $b$.

*(Variante Bac, 2009)*





**C18.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|1 - 2x| = |x + 4|$.

**C19.** Demonstrați că numărul $\left|2 - \sqrt{5}\right| + \left|3 - \sqrt{5}\right|$ este număr natural.

**C20.** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $|3x - 2| = 11$.

**C21*.** Calculați $\left[\frac{17}{5}\right] + \left\{\frac{11}{6}\right\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real $x$.

**C22*.** Determinați partea întreagă a numărului $a = \sqrt{17}$.

**C23*.** Determinați partea fracționară a numărului $b = \sqrt{25} + \sqrt{26}$.

**C24*.** Se consideră numărul $A = \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

**C25*.** Arătați că $A = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ este număr natural.

*(Variante Bac, 2008)*

**C26*.** Demonstrați egalitatea $\left[\sqrt{3} + \sqrt{25}\right] = \left[\sqrt{4} + \sqrt{19}\right]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$.

**C27*.** Demonstrați prin inducție matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**C28*.** Demonstrați prin inducție matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

**C29*.** Demonstrați că numărul $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ este irațional.

**C30*.** Arătați că, pentru orice număr natural $n$ diferit de zero, fracția $\frac{2n-1}{2n+1}$ este ireductibilă.

### 1.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Determinați elementele mulțimii $A \cap B$ dacă $A = (2003, 2015)$ și $B = (2014, 2016)$.

**2.** Calculați suma $|-3| + |-5| \cdot 2$.

**3.** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției $p : \sqrt{4} + \sqrt{36} = \sqrt{64}$.

**4.** Câte submulțimi ale mulțimii $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ conțin doar numere impare?

**5.** Ordonați crescător numerele $a=\sqrt{4}-4$, $b=\sqrt{9}-9$ și $c=\sqrt{16}-16$.

**6.** Demonstrați că numărul $A=\left(2+\sqrt{5}\right)^2+\left(2-\sqrt{5}\right)^2$ este natural.

### Testul 2*

**1.** Determinați cel mai mic număr întreg al mulțimii $A\cap B$ dacă $A=(2010, 2016)$ și $B=(2013, 2020)$.

**2.** Determinați partea întreagă a numărului $x=\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$.

**3.** Se consideră predicatul $p(x):\dfrac{2x+1}{2x}$, unde $x\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că propoziția $\exists\, x\in\mathbb{N}^*$, $p(x)\in\mathbb{N}$ este falsă.

**4.** Comparați numerele $a=5\sqrt{3}$ și $b=3\sqrt{7}$.

**5.** Numărul rațional $\dfrac{5}{4}=\overline{1,a_1a_2a_3...a_n...}$. Calculați suma $a_1+a_2+a_3+...+a_{2014}$.

**6.** Demonstrați prin inducție matematică că egalitatea $1+2+2^2+...+2^n=2^{n+1}-1$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

## 2. Șiruri. Progresii

### 2.1. Noțiuni teoretice

#### 2.1.1. Șiruri

**Terminologie:** • Vom nota cu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mulțimea termenilor șirului;

• $x_n$ reprezintă al $n$-lea termen al șirului.

**Forme de prezentare:**

• Prin enumerarea termenilor, de exemplu șirul 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...;

• Prin formula termenului general, de exemplu șirul $x_n=\dfrac{2n+1}{3n+4}$, $n\in\mathbb{N}^*$;

• Prin formulă de recurență, de exemplu șirul $\begin{cases}x_1=2\\x_{n+1}=3x_n-2\end{cases}$.

#### 2.1.2. Progresii aritmetice

**Definiție:** Se numește **progresie aritmetică** un șir de numere cu proprietatea că fiecare termen începând cu al doilea se obține din precedentul adunând aceeași cantitate constantă numită *rație*.

**Proprietăți:** Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu rația $r$. Atunci:

**P1.** $a_{n+1}=a_n+r$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;





**P2.** $a_n=a_1+(n-1)r$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

**P3.** $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$;

**P4.** Dacă $S_n=a_1+a_2+...+a_n$, atunci $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$.

#### 2.1.3. Progresii geometrice

**Definiție:** Se numește **progresie geometrică** un șir de numere nenule cu proprietatea că fiecare termen începând cu al doilea se obține din precedentul prin înmulțirea cu aceeași cantitate constantă numită *rație*.

**Proprietăți:** Fie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică cu rația $q$. Atunci:

**P1.** $b_{n+1}=b_nq$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

**P2.** $b_n=b_1q^{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$;

**P3.** $b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$;

**P4.** Dacă $S_n=b_1+b_2+...+b_n$ și $q\neq 1$, atunci $S_n=\dfrac{b_nq-b_1}{q-1}$.

### 2.2. Probleme de inițiere

**I1.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir de numere oarecare astfel încât $x_n=\dfrac{2n+1}{3n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați $x_{10}$.

**I2.** Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1$, $a_2$, 13, 17, 21, ... .

**I3.** Într-o progresie aritmetică cu rația 3, avem $a_1=2$. Calculați $a_5$.

**I4.** Într-o progresie aritmetică cu rația 5, avem $a_8=70$. Calculați $a_1$.

**I5.** Într-o progresie aritmetică cu rația 4, avem $a_6=-13$. Calculați $a_{10}$.

**I6.** Într-o progresie aritmetică cu $a_1=7$, avem $a_7=25$. Determinați rația progresiei.

**I7.** Într-o progresie geometrică cu rația $-1$, avem $b_1=5$. Calculați $b_{2014}$.

**I8.** Într-o progresie geometrică cu rația 2, avem $b_7=56$. Calculați $b_6$.

**I9.** Într-o progresie geometrică cu rația $\dfrac{1}{2}$, avem $b_3=64$. Calculați $b_7$.

**I10.** Într-o progresie aritmetică, avem $a_1=2$ și $a_{20}=98$. Calculați suma $a_1+a_2+a_3+...+a_{20}$.

### 2.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n=\dfrac{3n+1}{2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Calculați suma $x_1+x_3+x_5+x_7$.

**C2.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = 4n-3$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați al câtelea termen al șirului este numărul 37.

**C3.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_5 = 24$ și $a_9 = 76$. Calculați $a_7$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_2 = 7$ și $a_{10} = 15$. Calculați $a_{2008}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C5.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică de rație 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinați $a_1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C6.** Stabiliți dacă numărul 2007 aparține progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, ... .

*(Variante Bac, 2007)*

**C7.** Determinați primul termen al unei progresii geometrice $b_1, b_2$, 18, 54, 162, ... .

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu rația negativă, avem $a_2 = 3$ și $a_4 = 147$. Determinați $a_3$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C9.** Determinați numărul real $x$, știind că numerele 2, $x$ și $x+4$ sunt în progresie aritmetică.

*(Variante Bac, 2007)*

**C10.** Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_2 = 5$ și $a_5 = 40$. Determinați $a_1$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C11.** Într-o progresie geometrică cu termeni pozitivi, suma primilor doi termeni este 4, iar a următorilor doi termeni este 36. Determinați primul termen al progresiei.

**C12.** Demonstrați că, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, numerele $x-1$, $2x+3$ și $3x+7$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**C13.** Determinați numărul real pozitiv $x$, știind că $x$, 6 și $x-5$ sunt în progresie geometrică.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** Calculați suma $1+4+7+10+13+\ldots+28+31$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Calculați suma primilor 30 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C16.** Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1$, 6, $b_3$, 24, ... .

*(Variante Bac, 2009)*

**C17.** Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_1 + a_2 = 5$ și $a_2 + a_3 = 20$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C18.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, cu rația 2, suma primilor 9 termeni este 351. Determinați primul termen al progresiei.

*(Variante Bac, 1998)*





**C19.** Numerele reale pozitive $a$, $b$, $c$, $d$ sunt în progresie geometrică. Dacă $d-a = 7$ și $c-b = 2$, aflați rația progresiei.

**C20.** Calculați suma $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C21*.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_{2008} = 2a_{1008}$. Calculați $a_8$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C22*.** Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$, avem $a_{2006} = 3$ și $a_{2010} = 12$. Calculați $a_{2008}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C23*.** Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, cu proprietatea $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 30$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C24*.** Într-o progresie geometrică $(a_n)_{n\geq 1}$ formată din numere reale, avem $a_{2006}a_{2007}a_{2008} = 27$. Determinați $a_{2007}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C25*.** Un triunghi are măsurile unghiurilor $A$, $B$, $C$ în progresie aritmetică. Determinați măsura unghiului $B$.

**C26*.** Se consideră numerele reale nenule $a$, $b$. De asemenea, se consideră numerele $x = a^2$, $y = ab$ și $z = b^2$, aflate în progresie aritmetică în această ordine. Demonstrați că $a = b$.

**C27*.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, suma primilor 10 termeni este 55, iar suma primilor 12 termeni este 78. Determinați $a_1$.

**C28*.** Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{2008}}$. Demonstrați că $s\in(1, 2)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C29*.** Se consideră un șir de numere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit prin $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 3x_n + 2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x_n = 3^n - 1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

**C30*.** Pe o foaie sunt scrise numere naturale din trei în trei în această ordine: 2; 5; 8; 11; 14; ... . Stabiliți dacă numărul 2008 va apărea pe această foaie.

*(Variante Bac, 2008)*

## 2.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Se consideră o progresie aritmetică cu $a_2 = 7$ și $a_3 = 1$. Determinați rația acestei progresii.

**2.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = \frac{2n+5}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x_4 > x_9$.

**3.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = 5n-3$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Demonstrați că $x_7 - x_5 = x_{11} - x_9$.

**4.** Se consideră o progresie aritmetică cu $a_1 = 4$ și rația $r = 2$. Calculați suma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$.

**5.** Se consideră o progresie geometrică în care $b_1 = 7$ și $b_2 = 14$. Calculați $b_5$.

**6.** Determinați valoarea numărului real $x$, știind că numerele $x$, $3x+1$ și $x+14$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice în această ordine.

### Testul 2*

**1.** Pe o foaie sunt scrise 19 numere astfel încât primele 10 sunt în progresie geometrică cu rația 2, iar ultimele 10 în progresie aritmetică cu rația 2. Dacă primul număr este 1, determinați care este ultimul număr.

**2.** O progresie aritmetică și una geometrică au primul termen egal cu 2 și al patrulea termen egal cu 54. Care dintre progresii are rația mai mare?

**3.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu termeni descrescători, avem $a_2 = 6$ și $a_1 a_3 = 20$. Determinați rația progresiei.

**4.** Determinați numărul $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele $x$, $2x+1$ și $4x+5$ sunt, în această ordine, termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

**5.** Fie o progresie geometrică în care $b_3 - b_1 = 16$ și $b_4 - b_2 = 48$. Determinați rația acestei progresii.

**6.** Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un șir astfel încât $x_n = 4n-1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că termenii șirului formează o progresie aritmetică.

## 3. Funcții

### 3.1. Noțiuni teoretice

#### 3.1.1. Generalități asupra noțiunii de funcție

**Definiție:** Se numește **funcție** definită pe mulțimea $A$ cu valori în mulțimea $B$ o lege de corespondență care atribuie fiecărui element din $A$ un singur element din $B$.

**Terminologie și notații:**

• Notăm $f: A \to B$. Fiecărui $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$, numit imaginea lui $x$ prin funcția $f$;

• Mulțimea $A$ se numește domeniu, iar mulțimea $B$ se numește codomeniu.

**Definiție:** Fie $M \subset A$. Mulțimea $\{f(x) | x \in M\}$ se numește **imaginea** mulțimii $M$ prin funcția $f$ și se notează $f(M)$. În cazul $M = A$, obținem $f(A) = \operatorname{Im} f$, numită **imaginea funcției $f$ sau mulțimea valorilor funcției $f$.**

**Definiție:** Spunem că funcțiile $f: A \to B$ și $g: C \to D$ sunt **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$.





#### 3.1.2. Graficul unei funcții

Fie o funcție $f: A \to B$.

**Definiție:** Mulțimea $\{(x,y) | x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ se numește **graficul** funcției $f$ și notăm $G_f$.

**Observații:**

• Perechea $(x,y) \in G_f$ dacă și numai dacă $f(x) = y$;

• Intersecția imaginii geometrice a graficului cu axa $Ox$ este reprezentată de mulțimea $G_f \cap Ox = \{(\alpha, 0) | f(\alpha) = 0\}$;

• Intersecția imaginii geometrice a graficului cu axa $Oy$ este reprezentată de mulțimea $G_f \cap Oy = \{(0, f(0))\}$;

• Intersecția imaginilor geometrice ale graficelor funcțiilor $f$ și $g$ este reprezentată de mulțimea $G_f \cap G_g = \{(x, f(x)) | f(x) = g(x)\}$.

#### 3.1.3. Paritatea

**Definiție:** O mulțime $D \subset \mathbb{R}$ se numește **mulțime simetrică** dacă pentru orice $x \in D$ avem $-x \in D$.

**Definiție:** Fie $D$ o mulțime simetrică. Funcția $f: D \to \mathbb{R}$ se numește **funcție pară** dacă $f(-x) = f(x)$, pentru orice $x \in D$. Funcția $f$ se numește **funcție impară** dacă $f(-x) = -f(x)$, pentru orice $x \in D$.

#### 3.1.4. Periodicitatea

**Definiție:** O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ se numește **funcție periodică** dacă există $T > 0$ astfel încât $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in A$. În aceste condiții, numărul $T$ se numește **perioada** funcției $f$.

**Teoremă:** Fie $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție periodică de perioadă $T$. Atunci $f(x+kT) = f(x)$ pentru orice $x \in A$ și $k \in \mathbb{Z}$.

#### 3.1.5. Funcțiile monotone

**Definiție:** Fie $A, B \subset \mathbb{R}$. Funcția $f: A \to B$ se numește:

• **funcție crescătoare**, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x < y$, avem $f(x) \leq f(y)$;

• **funcție strict crescătoare**, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x < y$, avem $f(x) < f(y)$;

• **funcție descrescătoare**, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x < y$, avem $f(x) \geq f(y)$;

• **funcție strict descrescătoare**, dacă pentru orice $x, y \in A$, $x < y$, avem $f(x) > f(y)$;

• **funcție monotonă**, dacă este crescătoare sau descrescătoare;

• **funcție strict monotonă**, dacă este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

**Teoremă:** Suma a două funcții monotone de același tip este tot o funcție monotonă de același tip.

**Definiție:** Numărul $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ definit pentru orice $x, y \in A$, $x \neq y$, se numește **raportul de variație** al funcției $f: A \to B$ și se notează cu $R_f$.

**Teoremă:** Funcția $f: A \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare dacă și numai dacă $R_f > 0$, pentru orice $x, y \in A$, $x \neq y$.

Funcția $f: A \to \mathbb{R}$ este strict descrescătoare dacă și numai dacă $R_f < 0$, pentru orice $x, y \in A$, $x \neq y$.

**Teoremă:** Fie o funcție $f: A \to \mathbb{R}$ strict monotonă. Atunci $\forall\, y \in \mathbb{R}$, ecuația $f(x) = y$ admite cel mult o soluție $x \in A$.

### 3.1.6. Compunerea funcțiilor

**Definiție:** Fie funcțiile $f: A \to B$ și $g: B \to C$. Funcția $h: A \to C$ definită prin $h(x) = g(f(x))$ se numește **compunerea** funcțiilor $f$ și $g$. Notăm $h = g \circ f$.

**Observație:** Compunerea funcțiilor este o operație asociativă, dar nu este comutativă.

### 3.2. Probleme de inițiere

**I1.** Fie funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (-1)^x + (-2)^{x+1}$. Calculați $f(6)$.

**I2.** Fie funcțiile $f, g: \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2007} + 2x^{2006}$, $g(x) = 2x^{2008} + x$. Demonstrați că funcțiile $f$ și $g$ sunt egale.

**I3.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Calculați produsul $P = f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(100)$.

**I4.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$. Demonstrați că $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

**I5.** Demonstrați că funcția $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6$ este strict crescătoare.

**I6.** Demonstrați că punctul $A(2, 3)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

**I7.** Determinați coordonatele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2014} + x + 1$ cu axa $Oy$.

**I8.** Determinați cea mai mare valoarea a funcției $f: \{0, 1, 2, 3,\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 7$.

**I9.** Fie $A = \{-4; -3; -2; -1\}$ și funcția $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 25$. Determinați $x \in A$ pentru care $f(x) = 34$.

**I10.** Fie funcția $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 3n + 2$. Demonstrați că $f(m) \neq f(n)$, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.





### 3.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Demonstrați că $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C2.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$. Calculați $f(-20) + f(-10) + f(0) + f(10) + f(20)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Fie funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Demonstrați că $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Demonstrați că funcția $f: \{2, 4, 6, 8, 10\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{2x+2} + (-4)^{x+1}$ este constantă.

*(Variante Bac, 2008)*

**C5.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x+1}{3}$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f$ cu axele de coordonate.

**C6.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + a$. Determinați valoarea numărului real $a$, știind că punctul de coordonate (2, 5) aparține graficului lui $f$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Fie funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$. Calculați $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(2008)$.

**C8.** Determinați valoarea numărului real $a$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2a - 6)x + 5$ este constantă.

**C9.** Fie funcțiile $f: \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x^3 + (-1)^{x+1}$, $g: \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{Z}$, $g(x) = ax^{2007} + bx^2 + c$. Determinați numerele reale $a$, $b$, $c$, știind că funcțiile $f$ și $g$ sunt egale.

**C10.** Fie funcția $f: \{-1; 0; 1\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 3x^3 + (-1)^{x+1}$. Reprezentați geometric graficul acestei funcții într-un sistem de axe ortogonale $xOy$.

**C11.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2008x + 2007$. Determinați punctele de pe graficul funcției care au coordonate egale.

*(Variante Bac, 2008)*

**C12.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$.

**C13.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^{20} + (1 - a)x^8 + 3$, unde $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că punctul de coordonate $(-1, 4)$ aparține graficului funcției $f$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

**C14.** Se consideră funcția $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$. Demonstrați că $f(3) - f(1) + f(-1) - f(-3) = 0$.

**C15.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1-a$. Determinați numărul $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctul de coordonate (2, 3) aparține graficului funcției $f$.

**C16.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=f(x)=x^4-2x^2+2014$. Demonstrați că $f(\sqrt{2})=f(-\sqrt{2})$.

**C17.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-8$ cu axa $Ox$.

**C18.** Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Demonstrați că $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$, pentru orice $x, y\in(0,\infty)$, $x\neq y$.

**C19.** Se dă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+1, \text{dacă } x<1\\ \sqrt{x-1}, \text{dacă } x\geq 1\end{cases}$. Aflați $a\in\mathbb{R}$, știind că punctul $A(a, 2)$ se află pe graficul lui $f$.

**C20.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{4x+1}{3}$. Dați exemplu de număr întreg $k$ pentru care $f(k)\in\mathbb{Z}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C21*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x^4$. Calculați $(f\circ f\circ f\circ f)(1)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C22*.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ și $g(x)=2x$. Determinați expresia funcției $g\circ f$.

**C23*.** Dacă $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-1)^2, g(x)=x+1$. Demonstrați că funcțiile $f\circ g$ și $g\circ f$ nu sunt egale.

**C24*.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{2}+\sqrt{2008}$. Demonstrați că pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$ distincte avem $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C25*.** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x}$. Demonstrați că $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0, \forall x, y\in(0,\infty), x\neq y$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C26*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$. Calculați suma $S=(f\circ f)(-10)+(f\circ f)(-9)+\ldots+(f\circ f)(10)$.

**C27*.** Studiați monotonia funcției $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

**C28*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-3)(x-4)+5$. Demonstrați că pentru orice număr întreg $x$ avem $\frac{f(x)}{2}\notin\mathbb{Z}$.





**C29*.** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2012}+2x^2+\frac{1}{2012}$ nu intersectează axa $Ox$.

**C30*.** Folosind monotonia funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, demonstrați că $f(2\sqrt{3})>f(3\sqrt{2})$.

### 3.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Fie funcția $f:\{1, 2, 3, 4, 5\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$. Calculați diferența între cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției $f$.

**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție al graficelor funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+7$ și $g(x)=5$.

**3.** Determinați valoarea numărului real $a$ pentru care punctul de coordonate $(1, 5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2ax^3-9$.

**4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-1$. Calculați produsul $P=f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(2014)$.

**5.** Demonstrați că punctul $A(2, 4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^4-4ax^2+x+2$ oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

**6.** Fie mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ și funcția $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2$. Determinați elementele mulțimii $M=\{x\in A\,|\,f(x)<18\}$.

#### Testul 2*

**1.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2013}+3x^5-4x$ este impară.

**2.** Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică relația $f(x+3)=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Dacă $f(2)=11$, calculați $f(14)$.

**3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x\sqrt{3}$ este strict descrescătoare.

**4.** Fie funcțiile $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definite prin $f(x)=2x+3$, $g(x)=3x-5$ și $h(x)=(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)$. Demonstrați că funcția g este constantă.

**5.** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[2x+1]+\frac{1}{2}$ nu intersectează axa $Ox$.

**6.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|2x-8|$ cu axele de coordonate.

# 4. Funcția de gradul I

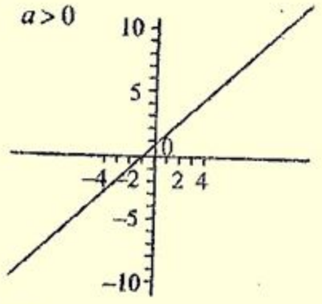
## 4.1. Noțiuni teoretice

**Definiție:** Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$ se numește **funcție de gradul I.**

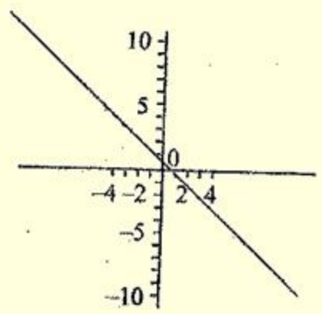
**Observație:** Funcția de gradul I este strict monotonă, fiind strict crescătoare dacă $a>0$ și strict descrescătoare dacă $a<0$.

**Observație:** Imaginea geometrică a funcției de gradul I este o dreaptă (vezi exemplele din figurile următoare).

$a>0$




$a<0$




**Semnul funcției de gradul I:** Este extrem de util în soluționarea inecuațiilor. Pentru o funcție oarecare de gradul I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, avem tabelul următor:

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | semn opus lui $a$ | 0 | semnul lui $a$ |

## 4.2. Probleme de inițiere

**I1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Calculați produsul $P=f(-3)\cdot f(-2)\cdot\ldots\cdot f(3)$.

**I2.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$, $g(x)=-2x+1$. Demonstrați că $f(2)+g(2)=f(-2)+g(-2)$.

**I3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Demonstrați că numărul $a=f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$ este pătrat perfect.

**I4.** Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați numerele reale $a$, $b$, știind că $3f(x)+2=3x+8$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**I5.** Demonstrați că punctul $A(3,7)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-5$.

**I6.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Demonstrați că funcția este strict crescătoare.





**I7.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+5$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f$ cu axa $Ox$.

**I8.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$. Demonstrați că $f\left(\frac{11}{7}\right)-f\left(\frac{4}{7}\right)=f\left(\frac{13}{9}\right)-f\left(\frac{4}{9}\right)$.

**I9.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=-4x+1$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

**I10.** Determinați funcția de gradul I $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pentru care $f(2)=5$ și $f(3)=7$.

## 4.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Calculați $f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\ldots+f(2^7)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Demonstrați că $f(k)+f(k+3)=f(k+1)+f(k+2)$, pentru orice $k\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Determinați numerele reale $a$, care verifică relația $f(a)+f(a+1)=10$.

**C4.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(4)=8$ și $f(1)+f(2)+f(3)=6a+2b$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C5.** Demonstrați că punctul $A(a+1, 3a-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-4$, oricare ar fi valoarea numărului real $a$.

**C6.** Determinați valoarea numărului $a$, știind că punctul $A(a+1, a-1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$.

**C7.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați un punct care aparține graficului funcției $f$ și are coordonate egale.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Demonstrați că graficele funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$ și $g(x)=-x+3$ intersectează axa $Ox$ în același punct.

**C9.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$, $g(x)=-4x+2$. Demonstrați că graficele celor două funcții intersectează axa $Oy$ în două puncte simetrice în raport cu originea axelor de coordonate.

**C10.** Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-12$, $g(x)=2x+8$. Dacă $G_f\cap Ox=\{A\}$ și $G_g\cap Oy=\{B\}$, demonstrați că $OA=OB$.

**C11.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:[-2,1]\to\mathbb{R}, f(x)=-x+1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $3x-6<6x-3$.

**C13.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x-4$. Determinați numerele reale $x$ care verifică inecuația $f(x)+f(1)\le 1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3-4x$. Determinați soluțiile reale ale inecuației $f(x)-1\ge 4x$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Determinați toate valorile reale ale numărului $x$, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+11$ verifică inegalitatea $3<f(x)<15$.

**C16.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b, g(x)=bx+a$, unde $a, b\in\mathbb{R}$. Demonstrați că, dacă $f(-1)=g(-1)$, atunci funcțiile $f$ și $g$ sunt egale.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+6$. Dacă $G_f\cap Ox=\{A\}$ și $G_f\cap Oy=\{B\}$, determinați aria triunghiului $OAB$.

**C18.** Determinați $a\in\mathbb{R}$, dacă graficele funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$ și $g(x)=ax+4$ sunt două drepte paralele.

**C19.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1, g(x)=-3x+1$. Rezolvați inecuația $f(x)\le g(x)$.

**C20.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+4$. Dacă $G_f\cap Ox=\{A\}$ și $G_f\cap Oy=\{B\}$, demonstrați că triunghiul $OAB$ este isoscel.

**C21*.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(m-2)x-3$ să fie strict descrescătoare.

*(Variante Bac, 2009)*

**C22*.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=1-x, g(x)=2x-1$. Demonstrați că funcția $f\circ g$ este strict descrescătoare.

*(Variante Bac, 2009)*

**C23*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=4x+3$. Dați exemplu de un număr real $b$ pentru care punctul $B(b, f(b))$ este situat în cadranul al doilea.

*(Variante Bac, 2008)*

**C24*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+2$. Demonstrați că nu există puncte ale graficului funcției care să aparțină cadranului al patrulea.

*(Variante Bac, 2008)*





**C25*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-7x-5$. Demonstrați că funcția este strict descrescătoare și ordonați crescător numerele $f(4\sqrt{2})$, $f(3\sqrt{3})$ și $f(2\sqrt{7})$.

**C26*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-6$. Calculați distanța de la originea sistemului de axe la dreapta ce reprezintă graficul funcției $f$.

**C27*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(2x-6)(3x+3)(5x+10)<0$.

**C28*.** Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul I, strict crescătoare, pentru care $(f\circ f)(x)=4x+3$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C29*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{4x-8}{3x+9}\le 0$.

**C30*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{3x+1}{2x-8}<1$.

### 4.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+11$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $f(a)+3=f(5)$.

**2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-5x+3$. Calculați valoarea expresiei $E=f(-4)-f(-3)-f(-2)+f(-1)$.

**3.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x+3$. Demonstrați că $f(\sqrt{2})<f(\sqrt{3})$.

**4.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-6x-12$ cu axele de coordonate.

**5.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+2013$. Demonstrați că $\frac{f(u)-f(5)}{u-5}\in\mathbb{N}$, pentru orice $u\in\mathbb{R}$, $u\ne 5$.

**6.** Determinați toate numerele reale $x$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+3$ verifică inegalitatea $2f(x)+f(2)\ge 4f(1)$.

#### Testul 2*

**1.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+3$. Notăm cu $A$ și $B$ punctele de intersecție ale graficului acestei funcții cu axele de coordonate. Demonstrați că $AB=\sqrt{10}$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-3x+6$. Determinați $x\in\mathbb{R}$, pentru care $\frac{f(x)}{15-f(x)}\le 0$.

**3.** Se consideră funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x + 2$ și $h(x) = 3x + 3$. Determinați valoarea numărului real $a$ pentru care $a(f(x)+g(x))=h(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**4.** Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(a^2+1)x+(2a+1)$ este strict crescătoare, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

**5.** Demonstrați că graficele funcțiilor $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=5x-3$, $g(x)=4x-2$ și $h(x)=-x+3$ au un punct comun.

**6.** Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcție de gradul I, demonstrați că funcția $f \circ f$ este strict crescătoare.

# 5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea

## 5.1. Noțiuni teoretice

### 5.1.1. Ecuația de gradul al II-lea cu coeficienți reali

**Forma generală:** $ax^2+bx+c=0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Numerele $a, b, c$ se numesc coeficienți, iar $x$ reprezintă necunoscuta.

**Rezolvare:**

- se calculează **discriminantul** ecuației, $\Delta = b^2 - 4ac$;
- dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația admite două rădăcini reale diferite, după formula $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația admite două rădăcini reale egale, după formula $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$;
- dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația nu admite rădăcini reale.

**Relațiile lui Viète:** Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ și $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

### 5.1.2. Funcția de gradul al II-lea

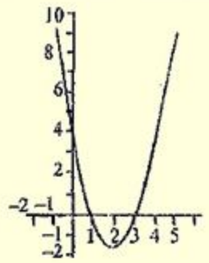
**Definiție:** Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, **se numește funcție de gradul al II-lea.**

**Observație:** Imaginea geometrică a graficului este o parabolă (vezi exemplele din figurile următoare).

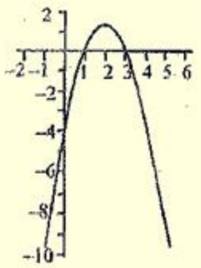




$a > 0$



$a < 0$



Dreapta verticală de ecuație $x=-\frac{b}{2a}$ **este** axă de simetrie a graficului. Vârful parabolei $V(x_V, y_V)$ are coordonatele $x_V = -\frac{b}{2a}$ și $y_V = f(x_V) = -\frac{\Delta}{4a}$. Vârful parabolei este punct de minim dacă $a > 0$ și punct de maxim dacă $a < 0$.

**Semnul funcției de gradul al II-lea: Este util în** soluționarea inecuațiilor. Pentru o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ cu proprietatea $\Delta > 0$, dacă notăm cu $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $f(x)=0$, obținem următoarea schemă:

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | semnul lui $a$ | 0 | semn opus lui $a$ | 0 | semnul lui $a$ |

## 5.2. Probleme de inițiere

**11.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculați $f(f(0)) - f(2)$.

**12.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 11x + 30$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(6)$.

**13.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 10$. Demonstrați că $f(3-x) = f(3+x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**14.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x+1$.

**15.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 + 9x + 8 = 0$.

**16.** Determinați perechile de numere reale $(x; y)$ soluții ale sistemului $\begin{cases} x+y=0 \\ y=x^2 \end{cases}$.

**17.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 + 4x + 3 \geq 0$.

**18.** Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$, calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

**I9.** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-6x+m$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați $m$, astfel încât $A(1,3)$ să fie punct al graficului funcției $g$.

**I10.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Se știe că punctele $A(0,3)$, $B(1,6)$ și $C(2,11)$ aparțin graficului acestei funcții. Determinați valorile numerelor reale $a$, $b$, $c$.

### 5.3. Probleme de consolidare

**C1.** Calculați valoarea maximă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+6x-9$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-6x+1$. Determinați axa de simetrie a graficului funcției.

*(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Arătați că vârful parabolei $y=x^2+5x+1$ este situat în cadranul al treilea.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Aflați coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta $d$: $y=2x+1$ și parabola $P$: $y=x^2+x+1$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C5.** Determinați valoarea numărului $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, știind că abscisa punctului de minim al graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+1)x^2-(m+2)x+1$ este egală cu 2.

*(Variante Bac, 2009)*

**C6.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-8x+3$, unde $m\in(0,\infty)$. Determinați $m$, știind că valoarea maximă a funcției $f$ este egală cu $-5$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C7.** Demonstrați că parabolele asociate funcțiilor $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$ și $g(x)=2x^2+4x+2$, au același vârf.

*(Variante Bac, 2007)*

**C8.** Demonstrați că ecuația $x^2-x\sqrt{5}+2=0$ nu admite rădăcini reale.

**C9.** Demonstrați că ecuația $x^2-(m+1)x+m=0$ admite rădăcini reale distincte, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**C10.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile: a) $\frac{3x-1}{x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=3$; b) $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{x-1}{x-2}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C11.** Determinați toate valorile reale ale numărului $m$, pentru care ecuația $x^2-4x+m=0$ admite rădăcini reale distincte.

**C12.** Precizați valoarea de adevăr a propoziției $p$: $\exists\, x\in\mathbb{R}$, $x^2-6x+10<0$.

*(Variante Bac, 2008)*





**C13.** Determinați numerele reale $x$ soluții ale inecuației $2x^2+2x\geq x^2-2x+5$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-3$, $g(x)=2x^2-x-3$. Rezolvați inecuația $f(x)\geq g(x)$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C15.** Determinați perechile de numere reale $(x;y)$ soluții ale sistemului $\begin{cases}x+y=4\\xy=3\end{cases}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C16.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+3x+2}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C17.** Fie funcția $f:[5,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+10x+2013$. Arătați că funcția este strict descrescătoare.

**C18.** Determinați numărul $m\in\mathbb{R}$, pentru care soluțiile ecuației $x^2-2mx+(m+1)=0$ verifică egalitatea $x_1+x_2=x_1x_2$.

**C19.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-x-7=0$. Calculați $x_1^2+x_2^2+x_1x_2$.

**C20.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-6x+6=0$. Calculați $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

**C21*.** Determinați $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(a+1)x^2+3(a-1)x+a-1$ intersectează axa $Ox$ în două puncte distincte.

*(Variante Bac, 2008)*

**C22*.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât punctul $A(m-1,m^2-3m)$ să se afle în cadranul al doilea.

**C23*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{2x-1}{1-x}\geq\frac{3x+2}{1-2x}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C24*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-m^2$, unde $m\in(0,\infty)$. Notăm cu $A$ și $B$ punctele de intersecție a parabolei asociate lui $f$ cu axa $Ox$. Determinați $m\in(0,\infty)$, astfel încât $AB=2014$.

**C25*.** Demonstrați că $(0;2)\cap(x^2-2x+3;x^2-2x+5)=\varnothing$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C26*.** Determinați soluțiile reale ale inecuației $\frac{2x+3}{x^2+x+1}\geq 1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C27*.** Determinați perechile de numere reale $(x;y)$ soluții ale sistemului $\begin{cases}x+y=2\\x^2+y^2=2\end{cases}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C28*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m+6$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați $m$, astfel încât $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C29*.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, pentru care inecuația $x^2+2x+m<0$ nu are soluții.

**C30*.** Considerăm funcția de gradul al II-lea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-(2m+1)x+m^2-4m+5$. Dacă $A$ este punctul în care graficul taie axa $Oy$, determinați valoarea minimă a segmentului $OA$.

### 5.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+20$. Demonstrați că vârful parabolei asociate acestei funcții are coordonate egale.

**2.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile reale ale ecuației $x^2+3x-5=0$. Calculați $x_1^2+x_2^2$.

**3.** Determinați toate numerele naturale care sunt soluții ale inecuației $x^2-2x-3\leq 0$.

**4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^2-mx+3$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați toate valorile reale ale lui $m$, pentru care abscisa punctului de minim al parabolei asociate lui $f$ este strict negativă.

**5.** Se consideră ecuația $x^2-mx+m-1=0$, unde $m$ este un parametru real. Determinați $m$ pentru care ecuația admite ca soluții două numere reale opuse.

**6.** Fie $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+5x+1$ și $g(x)=x^2+5x-2$. Demonstrați că $f(x)\geq g(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

#### Testul 2*

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+9$. Demonstrați că vârful parabolei asociate funcției se află pe dreapta de ecuație $d: x+y=7$.

**2.** Demonstrați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, ecuația $x^2-(2\sin a)x+1-\cos^2 a=0$ admite soluții reale egale.

**3.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, știind că rădăcinile $x_1$ și $x_2$ ale ecuației $x^2-(2m+1)x+3m=0$ verifică relația $x_1+x_2+x_1x_2=11$.

**4.** Demonstrați că, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$, parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2mx+m^2+1$ este situată deasupra axei $Ox$.

**5.** Dați exemplu de ecuație de gradul al II-lea, cu coeficienți raționali, ce are o soluție egală cu $\sqrt{3}$.

**6.** Determinați $a\in\mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2+(3a+1)x+a+3=0$ are soluții reale.





# 6. Vectori în plan

## 6.1. Noțiuni teoretice

### 6.1.1. Generalități

**Vectorul** $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat de
- direcția dreptei $AB$
- sensul de la $A$ la $B$
- modulul egal cu lungimea segmentului $[AB]$

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau suprapuse. Spunem că vectorii sunt **coliniari** și notăm $\vec{u}\parallel\vec{v}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **egali** dacă au aceeași direcție, același sens și același modul. Notăm $\vec{u}=\vec{v}$.

### 6.1.2. Adunarea vectorilor

**Regula paralelogramului:** Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

**Regula triunghiului:** Pentru orice puncte $A$, $B$, $C$, avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

**Proprietăți:** Adunarea vectorilor este asociativă, comutativă, are element neutru vectorul nul $\vec{0}$ și simetrizabilă. Simetricul vectorului $\vec{u}$ se notează $-\vec{u}$ și se numește **vectorul opus**. În particular, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

**Scăderea vectorilor:** Avem $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

### 6.1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalar

**Definiție:** Fiind dat numărul real $\alpha$ și vectorul $\vec{u}$, **vectorul** $\alpha\vec{u}$ are aceeași direcție cu $\vec{u}$, același sens dacă $\alpha>0$, respectiv sens opus dacă $\alpha<0$ și modulul egal cu $|\alpha|\cdot|\vec{u}|$.

**Proprietăți:** Înmulțirea vectorilor cu scalar este distributivă în raport cu adunarea vectorilor.

**Teoremă:** Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha\in\mathbb{R}$, astfel încât $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

### 6.1.4. Relații vectoriale fundamentale

V1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.

V2. Punctul $M$ este mijlocul segmentului $[AB]\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}$, pentru orice punct $P$ din planul triunghiului.

V3. Punctul $N\in[AB]$ pentru care $\dfrac{NA}{NB}=k\Leftrightarrow \overrightarrow{PN}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+k\overrightarrow{PB}}{1+k}$, pentru orice punct $P$ din planul triunghiului.

V4. Punctul $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$, pentru orice $P$ din planul triunghiului.

### 6.2. Probleme de inițiere

**I1.** Fie $M$ mijlocul segmentului $AB$. Determinați valoarea numărului real $x$, pentru care $\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} = 0$.

**I2.** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

**I3.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**I4.** Într-un plan se consideră punctele $A$, $B$, $C$ și $D$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

**I5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = 0$.

**I6.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Dacă $O$ este intersecția diagonalelor, atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

**I7.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $x$, $y$ două numere reale cu proprietatea că $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = 0$. Demonstrați că $x = y$.

**I8.** Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 6$ și $AD = 8$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

**I9.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 0$.

**I10.** Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = MN = NB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CD}$.

### 6.3. Probleme de consolidare

**C1.** Într-un plan se consideră punctele $M$, $N$ și $P$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$.

**C2.** Fie $M$, $N$, $P$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $CA$ ale triunghiului $ABC$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$.

**C3.** Fie $M$, $N$, $P$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $CA$ ale triunghiului $ABC$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} = 0$.

**C4.** Fie $M$ mijlocul laturii $BC$ a triunghiului $ABC$. Determinați valoarea numărului $x$ pentru care $\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GM} = 0$, unde $G$ este centrul de greutate al triunghiului.

**C5.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 6. Determinați lungimea vectorului $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

**C6.** Fie $M$, $N$, $P$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $CA$ ale triunghiului $ABC$. Demonstrați că $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA}$.

**C7.** Într-un plan se consideră punctele $A$, $B$, $C$ și $D$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

**C8.** Pe latura $BC$ a triunghiului $ABC$ se consideră punctele $M$ și $N$, astfel încât $BM = CN$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

**C9.** Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AC = 10$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.





**C10.** Pe segmentul $[AB]$ considerăm punctul $P$, astfel încât $AP = \frac{1}{4}AB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $x\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0$.

**C11.** Se consideră pentagonul $MNPQR$. Demonstrați că $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$.

**C12.** Fie rombul $ABCD$ și $O$ intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ sunt egali.

**C13.** Fie dreptunghiul $ABCD$; demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ au modulele egale.

**C14.** Fie $ABC$ un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $BC = 12$. Dacă $M$ este mijlocul ipotenuzei $BC$, calculați modulul vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

**C15.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că, oricare ar fi un punct $P$ din planul paralelogramului, avem $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$.

**C16.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $M$ mijlocul lui $AB$, iar $N$ mijlocul lui $CD$. Demonstrați că $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

**C17.** Determinați valoarea numerelor reale $x$ și $y$, pentru care $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$.

**C18.** Fie $ABCD$ un paralelogram, iar $O$ intersecția diagonalelor sale. Demonstrați că, oricare ar fi punctul $P$ din planul paralelogramului, are loc relația $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$.

**C19.** Fie $M$ mijlocul laturii $BC$ a triunghiului $ABC$. Determinați valorile numerelor reale $a$ și $b$, dacă $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

**C20.** Fie $M$, $N$, $P$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $CA$ ale triunghiului $ABC$. Demonstrați că, oricare ar fi punctul $S$ din planul triunghiului, are loc relația $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$.

**C21*.** Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = 0$.

**C22*.** Fie $ABCD$ un paralelogram, iar $O$ intersecția diagonalelor. Fie $M$ și $N$ mijloacele laturilor $AB$ și, respectiv, $CD$. Arătați că $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 0$.

**C23*.** Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru $O$. Atunci $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = 0$.

**C24*.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 5. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

**C25*.** Fie triunghiul $ABC$, $M$ mijlocul laturii $BC$, $N$ mijlocul medianei $AM$, iar $P$ un punct pe latura $AC$, astfel încât $PC = 2PA$. Demonstrați că punctele $B$, $N$ și $P$ sunt coliniare.

**C26*.** Fie $ABCD$ un romb. Dacă $m(\sphericalangle A) = 60°$, demonstrați că vectorii $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{CD}$ au același modul.

**C27*.** Fie $ABC$ un triunghi, $M$ mijlocul laturii $BC$ și $P$ mijlocul laturii $AC$. Demonstrați că vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MP}$ sunt coliniari.

**C28*.** Considerăm patrulaterul $MNPQ$ și $S$ mijlocul laturii $MN$, iar $T$ mijlocul laturii $PQ$. Demonstrați că $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{ST}$.

**C29°.** Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{ED}$.

**C30°.** Considerăm un pătrat $ABCD$ de centru $O$ și latură $AB=6$. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AD}$.

### 6.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $M$ mijlocul lui $AB$, iar $N$ mijlocul lui $CD$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CN}=0$.

**2.** Fie punctul $M$ mijlocul segmentului $[AB]$ și punctul $P$ mijlocul segmentului $[AM]$. Demonstrați că $\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}=0$.

**3.** Fie $ABC$ un triunghi echilateral de latură $AB=6$. Fie $M$ mijlocul laturii $[BC]$. Calculați modulul segmentului $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

**4.** În patrulaterul $ABCD$ notăm cu $M$, $N$, $P$ și $Q$ mijloacele laturilor $AB$, $BC$, $CD$ și, respectiv, $DA$. Demonstrați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{DQ}=0$.

**5.** În paralelogramul $ABCD$, vectorii $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$ au module egale. Demonstrați că $ABCD$ este dreptunghi.

**6.** În plan considerăm punctele $M$, $N$, $P$, $Q$ astfel încât $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$. Demonstrați că punctele $N$ și $P$ coincid.

#### Testul 2*

**1.** Considerăm triunghiul $ABC$ și numerele reale $x$, $y$, astfel încât $x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$. Demonstrați că $x=y$.

**2.** Notăm cu $M$ mijlocul segmentului $[AB]$ și cu $P$ mijlocul segmentului $[MB]$. Demonstrați că $4\overrightarrow{AP}+6\overrightarrow{BM}=0$.

**3.** Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Demonstrați că vectorii $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ și $\vec{v}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{ED}$ sunt vectori opuși.

**4.** Dreptunghiul $ABCD$ are laturile $AB=4$ și $BC=3$. Determinați modulul vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

**5.** În plan considerăm punctele $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, oricare trei necoliniare, astfel încât $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Demonstrați că $BCED$ este paralelogram.

**6.** Considerăm triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$ egală cu 10. Calculați modulul vectorului $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.





# 7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie

## 7.1. Noțiuni teoretice

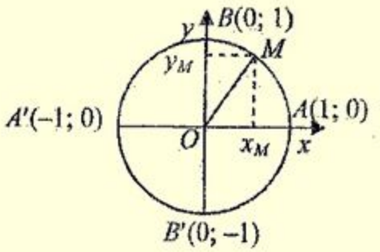
### 7.1.1. Cercul trigonometric

Unități de măsură pentru arce și unghiuri: • gradul sexagesimal;
• radianul.

Relația de legătură este: $180°=\pi$ *rad*.

Pentru orice număr real $t$, există un unic punct $M(x_M, y_M)$ pe cercul trigonometric astfel încât $m(\widehat{AM})=t$. Dacă $t\geq 0$, se parcurge cercul în sens trigonometric (de la $A$ spre $B$). Dacă $t<0$, se parcurge cercul în sens invers trigonometric. Atunci:

$\cos t=x_M$; $\sin t=y_M$; $\operatorname{tg} t=\frac{y_M}{x_M}$; $\operatorname{ctg} t=\frac{x_M}{y_M}$.




### 7.1.2. Valori trigonometrice fundamentale

| Grade | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radieni | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
| sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | −1 |
| tg | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | −1 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |
| ctg | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | −1 | $-\sqrt{3}$ | – |

### 7.1.3. Formule fundamentale

**Relații între funcțiile trigonometrice ale unui unghi:**

**Teoremă:** Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc relația $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

**Observație:** Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ pentru care există tg și ctg au loc relațiile:

$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$; $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$.

**Funcțiile trigonometrice pentru suma și diferența a două unghiuri:**

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$

$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$

$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$

$\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$

$\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$

**Formulele unghiului dublu:**

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;\qquad \operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$

**Transformarea sumelor în produse:**

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2};\qquad \sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2};$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2};\qquad \cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}.$

### 7.1.4. Elemente de trigonometrie în triunghi

**Proprietăți ale unghiurilor complementare:** Fie $B$, $C$ două unghiuri complementare. Atunci $\sin B=\cos C$.

**Proprietăți ale unghiurilor suplementare:** Fie $B$, $C$ două unghiuri suplementare. Atunci $\sin C=\sin B$ și $\cos C=-\cos B$.

**Teorema cosinusului:** Fie triunghiul $ABC$. Atunci $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$.

**Teorema sinusurilor:** Fie triunghiul $ABC$ și $R$ raza cercului circumscris. Atunci $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=2R$.

### 7.1.5. Formule de calcul al ariei unui triunghi

Fie triunghiul $ABC$. Notăm cu $S$ aria sa, cu $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor sale, cu $h_a$ lungimea înălțimii din $A$ și cu $p$ semiperimetrul său $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$. De asemenea, $R$ este raza cercului circumscris, iar $r$ este raza cercului înscris. Atunci: $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{abc}{4R}=pr$.





### 7.1.6. Produsul scalar a doi vectori

**Definiție:** Numim **produsul scalar** al vectorilor $\vec{u}$ și, respectiv, $\vec{v}$ și notăm $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ca fiind egal cu $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, unde $\alpha$ reprezintă măsura unghiului format de cei doi vectori. În particular: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A$.

**Teoremă:** Pentru orice trei puncte $A$, $B$, $C$, are loc relația $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

**Proprietăți:**

**P1.** Pentru orice vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, avem $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

**P2.** Pentru orice vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ și orice $\alpha\in\mathbb{R}$, avem $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

**P3.** Pentru orice vectori nenuli $\vec{u}$, $\vec{v}$, avem $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ dacă și numai dacă $\vec{u}\perp\vec{v}$.

## 7.2. Probleme de inițiere

**I1.** Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC=10$ și cateta $AC=6$. Calculați $\cos C$.

**I2.** Considerăm un triunghi dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC=10$, iar $\sin B=\dfrac{3}{5}$. Determinați perimetrul triunghiului.

**I3.** Demonstrați că în orice triunghi dreptunghic $ABC$ ($m(\sphericalangle A)=90°$) are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$.

**I4.** Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$. Dacă $\sin B=\dfrac{2}{3}$, calculați $\cos B$.

**I5.** Demonstrați că $\sin 60°=2\sin 30°\cdot\cos 30°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}30°$.

**I6.** Demonstrați că $\sin 45°\cos 45°+\sin 135°\cos 135°=0$.

**I7.** Se consideră triunghiul $ABC$, în care $AB=6$, $AC=8$ și $m(\sphericalangle A)=120°$. Calculați lungimea laturii $BC$.

**I8.** În triunghiul $ABC$, avem $AB=4\sqrt{2}$, $AC=6$ și $m(\sphericalangle C)=45°$. Calculați $\sin B$.

**I9.** Demonstrați că $\sin 20°+\sin 50°+\sin 80°=\sin 100°+\sin 130°+\sin 160°$.

**I10.** Demonstrați egalitatea $\cos 35°+\cos 65°+\cos 90°+\cos 115°+\cos 145°=0$.

## 7.3. Probleme de consolidare

**C1.** Dacă $\sin 40°=t$, exprimați în funcție de $t$ valoarea $\sin 140°$.

**C2.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Demonstrați că $\operatorname{tg}B=\dfrac{\cos C}{\sin C}$.

**C3.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$. Arătați că, dacă $\sin B=\cos B$, atunci triunghiul este isoscel.

**C4.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$ și $AD$ înălțime, $D \in BC$. Demonstrați că $BD \cdot \operatorname{tg} B = CD \cdot \operatorname{tg} C$.

**C5.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$, astfel încât $\sin B + \cos C = \cos B + \sin C$. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Demonstrați că $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Demonstrați că $\sin 10° + \sin 50° - \sin 130° - \sin 170° = 0$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C8.** Demonstrați că $\cos^{2012} 55° - \sin^{2012} 35° = 0$.

**C9.** Se consideră triunghiul $ABC$, în care $AB = 4$, $AC = 6$ și $BC = 8$. Calculați $\cos A$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C10.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 5$, $AC = 7$ și $BC = \sqrt{39}$. Calculați măsura unghiului $A$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C11.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 4$, $AC = 5$ și $BC = 8$. Demonstrați că triunghiul este obtuzunghic.

**C12.** Arătați că $\sin^2 137° + \cos^2 43° = 1$.

**C13.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Dacă $BC = 10$ și $\cos B = \frac{3}{5}$, calculați perimetrul triunghiului $ABC$.

**C14.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Notăm cu $S_{ABC}$ aria sa. Demonstrați că $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC^2 \cdot \sin B \sin C$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C15.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Dacă $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2$, determinați măsura unghiului $B$.

**C16.** Demonstrați că $\cos 123° < \cos 56°$.

**C17.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, cu perimetrul 36. Dacă $\operatorname{tg} C = \frac{4}{3}$, determinați lungimea ipotenuzei $BC$.

**C18.** În triunghiul ascuțitunghic $ABC$, avem $AB = 6$. Dacă raza cercului circumscris este egală cu $3\sqrt{2}$, determinați măsura unghiului $C$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C19.** În triunghiul $ABC$, avem $BC = 8$ și $m(\sphericalangle A) = 30°$. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**C20.** În triunghiul $ABC$, avem $m(\sphericalangle A) = 70°$ și $m(\sphericalangle B) = 50°$. Dacă raza cercului circumscris este egală cu 4, calculați lungimea laturii $AB$.





**C21*.** Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{5}{13}$. Calculați $\cos x$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C22*.** Fie $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} y = \frac{3}{4}$. Calculați $\sin x$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C23*.** Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{3}{5}$ și $\cos y = \frac{5}{13}$. Calculați $\cos(x - y)$.

**C24*.** Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos 2x = \frac{2}{3}$. Calculați $\sin x$.

**C25*.** Demonstrați că $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C26*.** Demonstrați că $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b} = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$, pentru orice $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C27*.** Se consideră triunghiul echilateral $ABC$ de perimetru 18. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**C28*.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$ și are cateta $AB = 4$. Calculați $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

**C29*.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

**C30*.** Se consideră un triunghi oarecare $ABC$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{2}.$$

### 7.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Calculați $2\sin 60° - 3\operatorname{tg} 30°$.

**2.** Demonstrați egalitatea $\sin 20° - \sin 160° = \cos 20° + \cos 160°$.

**3.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, avem ipotenuza $\cos B = \frac{3}{5}$. Calculați $\operatorname{tg} C$.

**4.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45°$. Calculați $\sin C$.

**5.** Calculați perimetrul unui triunghi $ABC$, în care $AB = 10$, $AC = 8$ și $\cos A = \frac{4}{5}$.

**6.** În triunghiul dreptunghic $ABC$ ($m(\sphericalangle A) = 90°$), avem $\sin B < \sin C$. Demonstrați că $\operatorname{tg} B < 1$.

**Funcțiile trigonometrice pentru suma și diferența a două unghiuri:**

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(a+b)=\dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$

$\sin(a-b)=\sin a\cdot\cos b-\cos a\cdot\sin b$

$\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(a-b)=\dfrac{\operatorname{tg}a-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b}$

$\cos(a-b)=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b$

**Formulele unghiului dublu:**

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;$ $\qquad$ $\operatorname{tg}2x=\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$

**Transformarea sumelor în produse:**

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2};$ $\qquad$ $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2};$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2};$ $\qquad$ $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}.$

### 7.1.4. Elemente de trigonometrie în triunghi

**Proprietăți ale unghiurilor complementare:** Fie $B$, $C$ două unghiuri complementare. Atunci $\sin B=\cos C$.

**Proprietăți ale unghiurilor suplementare:** Fie $B$, $C$ două unghiuri suplementare. Atunci $\sin C=\sin B$ și $\cos C=-\cos B$.

**Teorema cosinusului:** Fie triunghiul $ABC$. Atunci $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$.

**Teorema sinusurilor:** Fie triunghiul $ABC$ și $R$ raza cercului circumscris. Atunci $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}=2R$.

### 7.1.5. Formule de calcul al ariei unui triunghi

Fie triunghiul $ABC$. Notăm cu $S$ aria sa, cu $a$, $b$, $c$ lungimile laturilor sale, cu $h_a$ lungimea înălțimii din $A$ și cu $p$ semiperimetrul său $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$. De asemenea, $R$ este raza cercului circumscris, iar $r$ este raza cercului înscris. Atunci: $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\dfrac{abc}{4R}=pr$.





### 7.1.6. Produsul scalar a doi vectori

**Definiție:** Numim **produsul scalar** al vectorilor $\vec{u}$ și, respectiv, $\vec{v}$ și notăm $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ca fiind egal cu $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, unde $\alpha$ reprezintă măsura unghiului format de cei doi vectori. În particular: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos A$.

**Teoremă:** Pentru orice trei puncte $A$, $B$, $C$, are loc relația $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}$.

**Proprietăți:**

**P1.** Pentru orice vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, avem $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

**P2.** Pentru orice vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ și orice $\alpha\in\mathbb{R}$, avem $(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})=\alpha\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$.

**P3.** Pentru orice vectori nenuli $\vec{u}$, $\vec{v}$, avem $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ dacă și numai dacă $\vec{u}\perp\vec{v}$.

## 7.2. Probleme de inițiere

**I1.** Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC=10$ și cateta $AC=6$. Calculați $\cos C$.

**I2.** Considerăm un triunghi dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC=10$, iar $\sin B=\dfrac{3}{5}$. Determinați perimetrul triunghiului.

**I3.** Demonstrați că în orice triunghi dreptunghic $ABC$ ($m(\sphericalangle A)=90°$) are loc relația $\sin B+\cos B=\sin C+\cos C$.

**I4.** Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$. Dacă $\sin B=\dfrac{2}{3}$, calculați $\cos B$.

**I5.** Demonstrați că $\sin 60°=2\sin 30°\cdot\cos 30°\cdot\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}30°$.

**I6.** Demonstrați că $\sin 45°\cos 45°+\sin 135°\cos 135°=0$.

**I7.** Se consideră triunghiul $ABC$, în care $AB=6$, $AC=8$ și $m(\sphericalangle A)=120°$. Calculați lungimea laturii $BC$.

**I8.** În triunghiul $ABC$, avem $AB=4\sqrt{2}$, $AC=6$ și $m(\sphericalangle C)=45°$. Calculați $\sin B$.

**I9.** Demonstrați că $\sin 20°+\sin 50°+\sin 80°=\sin 100°+\sin 130°+\sin 160°$.

**I10.** Demonstrați egalitatea $\cos 35°+\cos 65°+\cos 90°+\cos 115°+\cos 145°=0$.

## 7.3. Probleme de consolidare

**C1.** Dacă $\sin 40°=t$, exprimați în funcție de $t$ valoarea $\sin 140°$.

**C2.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Demonstrați că $\operatorname{tg}B=\dfrac{\cos C}{\sin C}$.

**C3.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$. Arătați că, dacă $\sin B=\cos B$, atunci triunghiul este isoscel.

**C4.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$ și $AD$ înălțime, $D \in BC$. Demonstrați că $BD \cdot \operatorname{tg} B = CD \cdot \operatorname{tg} C$.

**C5.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$, astfel încât $\sin B + \cos C = \cos B + \sin C$. Demonstrați că triunghiul este isoscel.

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Demonstrați că $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Demonstrați că $\sin 10° + \sin 50° - \sin 130° - \sin 170° = 0$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C8.** Demonstrați că $\cos^{2012} 55° - \sin^{2012} 35° = 0$.

**C9.** Se consideră triunghiul $ABC$, în care $AB = 4$, $AC = 6$ și $BC = 8$. Calculați $\cos A$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C10.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 5$, $AC = 7$ și $BC = \sqrt{39}$. Calculați măsura unghiului $A$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C11.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 4$, $AC = 5$ și $BC = 8$. Demonstrați că triunghiul este obtuzunghic.

**C12.** Arătați că $\sin^2 137° + \cos^2 43° = 1$.

**C13.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Dacă $BC = 10$ și $\cos B = \frac{3}{5}$, calculați perimetrul triunghiului $ABC$.

**C14.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Notăm cu $S_{ABC}$ aria sa. Demonstrați că $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC^2 \cdot \sin B \sin C$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C15.** Se consideră triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$. Dacă $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2$, determinați măsura unghiului $B$.

**C16.** Demonstrați că $\cos 123° < \cos 56°$.

**C17.** Fie triunghiul $ABC$, dreptunghic în $A$, cu perimetrul 36. Dacă $\operatorname{tg} C = \frac{4}{3}$, determinați lungimea ipotenuzei $BC$.

**C18.** În triunghiul ascuțitunghic $ABC$, avem $AB = 6$. Dacă raza cercului circumscris este egală cu $3\sqrt{2}$, determinați măsura unghiului $C$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C19.** În triunghiul $ABC$, avem $BC = 8$ și $m(\sphericalangle A) = 30°$. Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului $ABC$.

**C20.** În triunghiul $ABC$, avem $m(\sphericalangle A) = 70°$ și $m(\sphericalangle B) = 50°$. Dacă raza cercului circumscris este egală cu 4, calculați lungimea laturii $AB$.





**C21*.** Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{5}{13}$. Calculați $\cos x$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C22*.** Fie $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\operatorname{tg} y = \frac{3}{4}$. Calculați $\sin x$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C23*.** Fie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x = \frac{3}{5}$ și $\cos y = \frac{5}{13}$. Calculați $\cos(x - y)$.

**C24*.** Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos 2x = \frac{2}{3}$. Calculați $\sin x$.

**C25*.** Demonstrați că $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C26*.** Demonstrați că $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b} = 1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b$, pentru orice $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C27*.** Se consideră triunghiul echilateral $ABC$ de perimetru 18. Calculați $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

**C28*.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$ și are cateta $AB = 4$. Calculați $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

**C29*.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

**C30*.** Se consideră un triunghi oarecare $ABC$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{2}.$$

### 7.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Calculați $2\sin 60° - 3\operatorname{tg} 30°$.

**2.** Demonstrați egalitatea $\sin 20° - \sin 160° = \cos 20° + \cos 160°$.

**3.** În triunghiul dreptunghic $ABC$, avem ipotenuza $\cos B = \frac{3}{5}$. Calculați $\operatorname{tg} C$.

**4.** În triunghiul $ABC$, avem $AB = 4$, $AC = 2\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B) = 45°$. Calculați $\sin C$.

**5.** Calculați perimetrul unui triunghi $ABC$, în care $AB = 10$, $AC = 8$ și $\cos A = \frac{4}{5}$.

**6.** În triunghiul dreptunghic $ABC$ ($m(\sphericalangle A) = 90°$), avem $\sin B < \sin C$. Demonstrați că $\operatorname{tg} B < 1$.

Testul 2*

**1.** Considerăm triunghiul $ABC$, în care $AB=4$, $AC=6$ și $BC=8$. Comparați numerele $\cos A$ și $\cos B$.

**2.** Demonstrați inegalitatea $\sin 73^\circ \cdot \cos 124^\circ < 0$.

**3.** Demonstrați egalitatea $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = 1$.

**4.** Un triunghi $ABC$ are perimetrul 24 și raza cercului circumscris egală cu 5. Calculați $\sin A + \sin B + \sin C$.

**5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AD^2 - AB^2$.

**6.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$. Dacă $\sin B \le \sin C$ și $\cos B \le \cos C$, atunci triunghiul este isoscel.



# Clasa a X-a

## 1. Numere reale

### 1.1. Noțiuni teoretice

#### 1.1.1. Radicali

**Definiție:** Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ din numărul pozitiv $a$ și notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv $x$ unic cu proprietatea $x^n = a$.

**Observație:** Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Proprietățile radicalului:** Următoarele relații sunt adevărate pentru orice $a, b \ge 0$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \ge 2$.

**P1.** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; **P2.** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, $b \ne 0$; **P3.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^p}$; **P4.** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

**Observație:** Dacă $n$ este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$, și dacă $x < 0$, în aceste condiții $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

**Observație:** Avem $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

#### 1.1.2. Puteri cu exponent real

**Observație:** Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, $x \ne 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, $x \ge 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, $x \ge 0$, $m, n \in \mathbb{N}^*$.

**Proprietățile ridicării la putere:** Pentru orice $x, y > 0$ și orice $p, r \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

**P1.** $x^p x^q = x^{p+q}$; **P2.** $\dfrac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$; **P3.** $\left(x^p\right)^q = x^{pq}$; **P4.** $(xy)^p = x^p y^p$.

#### 1.1.3. Logaritmi

**Definiție.** Fie $a, b > 0$, $a \ne 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x = b$ se numește **logaritm în baza $a$ din $b$** și se notează cu $\log_a b$.

**Proprietățile logaritmului:** Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a, b, x, y > 0,\ a, b \neq 1$:

**P1.** $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; **P2.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

**P3.** $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x,\ \alpha \in \mathbb{R}$; **P4.** $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

**Observație:** Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

### 1.2. Probleme de inițiere

**I1.** Calculați $(-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5)$.

**I2.** Calculați $(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{100}$.

**I3.** Calculați $8^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

**I4.** Calculați $\sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}$.

**I5.** Calculați $\log_{11} 11 + \log_7 \frac{1}{7}$.

**I6.** Calculați $\log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000$.

**I7.** Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{27}$, $b = \log_2 \frac{1}{16}$, $c = -2$.

**I8.** Demonstrați că $\log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

**I9.** Demonstrați că $\log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}$.

**I10.** Dacă $\log_2 3 = a$, demonstrați că $\log_2 6 = 1 + a$.

### 1.3. Probleme de consolidare

**C1.** Calculați $\sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$.

**C2.** Arătați că $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

**C3.** Demonstrați că $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{250}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Demonstrați egalitatea $\sqrt[3]{\sqrt{729}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} = 1$.

**C5.** Dacă $\lg 3 = a$, demonstrați că $\lg 90 = 2a + 1$.

*(Variante Bac, 2008)*





**C6.** Demonstrați că $\log_2 12 + \log_2 14 - \log_2 21 = 3$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Arătați că numărul $a = \log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.

**C8.** Demonstrați că $\lg \frac{2}{1} + \lg \frac{3}{2} + \ldots + \lg \frac{10}{9} \in \mathbb{N}$.

**C9.** Demonstrați că $1331^{\frac{2}{3}} \in \mathbb{N}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C10.** Comparați numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$.

**C11.** Comparați numerele $3\sqrt{2008}$ și $2008\sqrt{3}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C12.** Calculați $b - a$, unde $a = \log_2 3$ și $b = \log_2 6$.

**C13.** Calculați $\lg 12 + \lg 15 - \lg 18$.

**C14.** Demonstrați că $\log_4 9 = \log_8 27$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C15.** Demonstrați că $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8 = 3$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C16.** Demonstrați că numărul $a = \log_9 \sqrt{3} + \log_4 \sqrt[3]{2}$ este rațional.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17.** Demonstrați că numărul $\log_2(5+\sqrt{7}) + \log_2(5-\sqrt{7}) - 2\log_2 3$ este întreg.

**C18.** Demonstrați că $\log_{2\sqrt{2}} 3\sqrt{3} = \log_2 3$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C19.** Comparați numerele $\log_5 2007$ și 4.

*(Variante Bac, 2008)*

**C20.** Fie $E(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$, unde $x \in (0,1) - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Arătați că $E(x) = \frac{2\sqrt{1-x}}{2x-1}$.

**C21*.** Se consideră numerele $a = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2+\sqrt{2}}$. Arătați că $\frac{b}{a} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

**C22*.** Determinați $a, b \in \mathbb{Q}$, știind că $(1+\sqrt{2})^3 = a + b\sqrt{2}$.

**C23*.** Arătați că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C24*.** Demonstrați că $\sqrt{3} + \sqrt{9} < \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C25*.** Demonstrați că $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C26*.** Demonstrați că $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C27*.** Demonstrați că $\log_3 5 \cdot \log_5 9 < \sqrt[3]{9}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C28*.** Demonstrați că $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27} > 0$.

**C29*.** Dacă $\log_3 2 = a$, demonstrați că $\log_{12} 18 = \frac{a+2}{2a+1}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C30*.** Demonstrați că $\log_3 7 > \log_7 3$.

*(Variante Bac, 2008)*

### 1.4. Teste de verificare

**Testul 1**

**1.** Demonstrați că $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$.

**2.** Demonstrați că numărul $a = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{32} - \sqrt{8}}$ este natural.

**3.** Demonstrați că $\lg 20 + \lg 50 = 3$.

**4.** Demonstrați că $\log_3 5 + \log_3 7 < \log_3 72 - \log_3 2$.

**5.** Ordonați crescător numerele $a = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$, $b = \sqrt[3]{-125}$ și $c = \lg \frac{1}{1000}$.

**6.** Demonstrați că $\log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{3}$.

**Testul 2***

**1.** Demonstrați că $\sqrt[3]{-216} + \sqrt{144} = \log_3 729$.

**2.** Demonstrați că $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8} = 0$.

**3.** Demonstrați că numerele $a = 10^{\lg 7}$ și $b = \sqrt[3]{343}$ sunt egale.

**4.** Arătați că numărul $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2\log_{16} 5$ este rațional.

**5.** Demonstrați că $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 = \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

**6.** Demonstrați că $\sqrt{10} + \sqrt{12} < 7$.





# 2. Funcții și ecuații

## 2.1. Noțiuni teoretice

### 2.1.1. Funcții bijective

**Definiție:** Funcția $f : A \to B$ se numește:

- **funcție injectivă,** dacă pentru orice $u, v \in A$, cu $u \neq v$, avem $f(u) \neq f(v)$;
- **funcție surjectivă,** dacă pentru orice $w \in B$ există $u \in A$, astfel încât $f(u) = w$;
- **funcție bijectivă,** dacă este injectivă și surjectivă.

**Proprietăți ale funcțiilor injective:**

**P1.** Funcția $f : A \to B$ este injectivă dacă și numai dacă pentru $u, v \in A$, cu $f(u) = f(v)$, avem $u = v$;

**P2.** Orice funcție $f : A \to \mathbb{R}$ strict monotonă este injectivă.

**Proprietăți ale funcțiilor surjective:** Funcția $f : A \to B$ este surjectivă dacă și numai dacă $\operatorname{Im} f = B$.

**Proprietăți ale funcțiilor bijective:** Funcția $f : A \to B$ este bijectivă dacă și numai dacă, pentru orice $w \in B$, ecuația $f(x) = w$ admite o singură soluție $x \in A$.

### 2.1.2. Funcții inversabile

**Definiție:** Funcția $f : A \to B$ se numește **funcție inversabilă** dacă există o funcție $g : B \to A$, astfel încât $(g \circ f)(x) = x$, pentru orice $x \in A$, și $(f \circ g)(y) = y$, pentru orice $y \in B$.

**Observații:**

- Dacă există, funcția $g$ se numește inversa funcției $f$ și se notează $f^{-1}$.
- Avem relația $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, cu $x \in A$ și $y \in B$.

**Teoremă:** O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

### 2.1.3. Funcții numerice

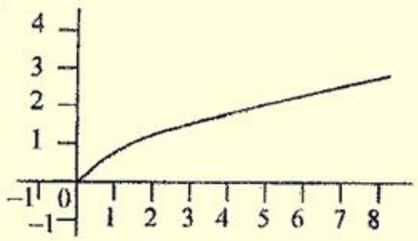
**Funcția rațională**

- funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, unde $g$, $h$ sunt două funcții polinomiale;
- domeniul $D = \{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$.

**Funcția radical**

- funcția $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
- domeniul $D$ este egal cu $\mathbb{R}$ dacă $n$ este impar și cu $[0, \infty)$ dacă $n$ este par;
- funcția este strict crescătoare și injectivă.

$n$ par



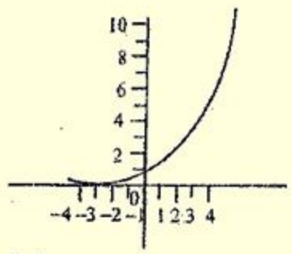
**Funcția exponențială**

• funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$;

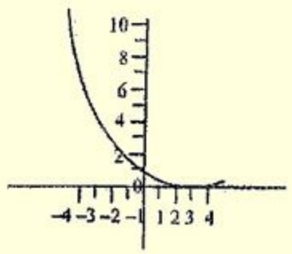
• este strict crescătoare dacă $a\in(1,\infty)$ și strict descrescătoare dacă $a\in(0,1)$;

• este injectivă și strict pozitivă.

$a\in(1,\infty)$



$a\in(0,1)$



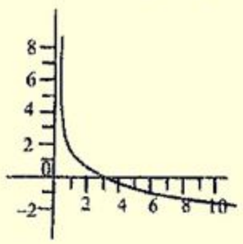
**Funcția logaritmică**

• funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$, $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$;

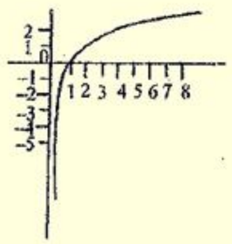
• este strict crescătoare dacă $a\in(1,\infty)$ și strict descrescătoare $a\in(0,1)$;

• este injectivă.

$a\in(1,\infty)$



$a\in(0,1)$



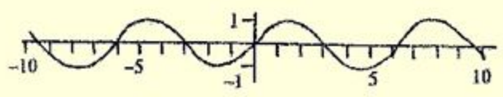
**Funcțiile sinus și arcsinus**

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$:

• este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$;

• este periodică cu perioada principală $T=2\pi$;

• este mărginită și $\operatorname{Im} f=[-1,1]$.





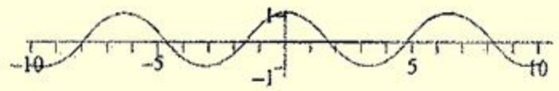


Restricția $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, $f(x)=\sin x$ este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția $f^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $f^{-1}(y)=\arcsin y$.

**Funcțiile cosinus și arccosinus**

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$:



• este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$;

• este periodică cu perioada principală $T=2\pi$;

• este mărginită și $\operatorname{Im} f=[-1,1]$.

Restricția $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția $f^{-1}:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f^{-1}(y)=\arccos y$.

**Propoziție:** Pentru orice $y\in[-1,1]$, avem $\arcsin y+\arccos y=\frac{\pi}{2}$.

**Funcțiile tangentă și arctangentă**

Funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, unde $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$:

• este periodică de perioadă principală $T=\pi$;

• este surjectivă.

Restricția $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg} x$ este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{-1}(y)=\operatorname{arctg} y$.

**Funcțiile cotangentă și arccotangentă**

Funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$, unde $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$:

• este periodică de perioadă principală $T=\pi$;

• este surjectivă.

Restricția $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$ este bijectivă și inversabilă.

Inversa sa este funcția $f^{-1}:\mathbb{R}\to(0,\pi)$, $f^{-1}(y)=\operatorname{arcctg} y$.

## 2.2. Probleme de inițiere

**I1.** Dacă funcția $f:\{1,2,3,4\}\to\{0,1,2\}$ este definită prin $f(1)=2$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, arătați că $f$ nu este injectivă, dar este surjectivă.

**I2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați $a,b\in\mathbb{R}$, știind că $f^{-1}(3)=1$ și $f^{-1}(5)=2$.

**I3.** Demonstrați că funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$ este inversa funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

**I4.** Demonstrați că $2\sqrt[3]{5}<3\sqrt[3]{2}$.

**I5.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$.

**I6.** Determinați $x\in[4,\infty)$ pentru care $\sqrt{3x-12}=2$.

**I7.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $3^{2x+1}=81$.

**I8.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2(4x-7)$.

**I9.** Demonstrați că $\log_2 15<4\log_2 2$.

**I10.** Determinați $x>1$ pentru care $\log_3(2x-2)=1$.

### 2.3. Probleme de consolidare

**C1.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f\circ f)(512)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** Determinați toate numerele naturale $n$, pentru care expresia $E(n)=\sqrt{7-3n}$ este corect definită.

*(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Dacă funcția $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ este definită prin $f(1)=2, f(2)=0, f(3)=3$, arătați că $f$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C4.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$.

**C5.** Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\log_2 x$. Calculați $(f\circ f)(256)$.

**C6.** Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$. Demonstrați că $f\left(\frac{4+9}{2}\right)>\frac{f(4)+f(9)}{2}$.

**C7.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{3x-4}$ este injectivă.

**C8.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{3x}{2x-2}$ este injectivă.

*(Variante Bac, 1997)*

**C9.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^{2012}$ nu este surjectivă.

**C10.** Dacă funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^5+x+1$ are inversa $g$, calculați $g(3)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C11.** Arătați că funcția $f:(0,\infty)\to(1,\infty), f(x)=x^2+1$ este inversabilă și determinați inversa sa.

**C12.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x+1}$. Demonstrați că $f(8)+f(26)>f(124)$.





**C13.** Determinați coordonatele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3^{x+1}-1$ cu axele de coordonate.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{2x-1}=7$; b) $\sqrt[3]{x^2-x-3}=-1$; c) $\sqrt{3x+4}=2\sqrt{x}$; d) $\sqrt[3]{x^3+x^2-x-2}=x$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $125^x=\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{2^x}=4$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{x-2}$; d) $4^{x+2}=2^{x^2-4}$; e) $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$; f) $\frac{2^x}{3^x}=\frac{3}{2}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C16.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\log_5(9-x^2)=1$; b) $\log_3(x^2-6)=\log_3(2x-3)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17.** Rezolvați ecuația $3^{x+1}\cdot 2^x=108$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18.** Determinați toate valorile strict pozitive ale numărului $x$, pentru care numerele $\lg\sqrt{x}$, $\frac{3}{2}$ și $\lg x$ reprezintă termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

*(Variante Bac, 2008)*

**C19.** Determinați $x\in(0,\infty)$ pentru care $2^{1+\log_3 x}=16$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C20.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{3^x+1}=2$.

**C21*.** Arătați că funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(x)=3x+1$ nu este inversabilă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C22*.** Demonstrați că funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=1+\log_3 x$ este inversa funcției $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=3^{x-1}$.

**C23*.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\to\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}, f(x)=\frac{2x}{3x+2}$ este inversabilă și determinați-i inversa.

**C24*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\sqrt{x+6}=x$; b) $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$; c) $\sqrt{x^2-3}-x=-1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C25*.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $2^{x+1}+5\cdot 2^x=14$; b) $4^x-3\cdot 2^x+2=0$; c) $2^x-14\cdot 2^{-x}=-5$; d) $3^x+9^x=12$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C26*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C27*.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $\lg(x+1)-\lg 9=1-\lg x$; b) $\log_2(x+2)-\log_2(x-5)=3$;

c) $\log_5(3x+1)=1+\log_5(x-1)$; d) $\lg(x-3)+\lg(x+6)=\lg 2+\lg 5$; e) $2\lg x=\lg(4x-3)$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C28*.** Rezolvați ecuațiile:

a) $\lg^2 x-4\lg x+3=0$; b) $2^{\log_2 x}=4$; c) $\log_2\sqrt[3]{x}=1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C29*.** Arătați că, pentru orice număr real $x$, numerele $3^x-1$, $3^{x+1}$ și $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

*(Variante Bac, 2008)*

**C30*.** Determinați valoarea numărului real $a$, știind că numerele $2^a$, $1+4^a$ și $2^{a+2}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

*(Variante Bac, 2009)*

**C31*.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(4^x+2^x+4)=1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C32*.** Calculați $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C33*.** Determinați maximul expresiei $E(x)=(\sin x+\cos x)^2$, când $x\in\mathbb{R}$.

**C34*.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos 2x$ este periodică de perioadă principală $T=\pi$.

**C35*.** Demonstrați că funcția $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x+\cos x$ nu este injectivă.

**C36*.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to[-8,8]$, $f(x)=3\sin x+4\cos x$ nu este surjectivă.

**C37*.** Demonstrați că graficul funcției $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$ nu intersectează axa $Ox$.

**C38*.** Determinați mulțimea soluțiilor următoarelor ecuații:

a) $\sin 2x=\frac{1}{2}$; b) $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$; c) $\sin 4x=\sin 2x$; d) $\cos 3x+\cos 5x=0$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C39*.** Determinați toate valorile numărului real $x\in[0,\pi]$, pentru care $\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

**C40*.** Demonstrați că ecuația $\cos^2 x-5\cos x+6=0$ nu admite soluții reale.





## 2.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Calculați $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$.

**2.** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg(x^{2012}+2012x^2+1)$ conține originea sistemului de coordonate.

**3.** Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a\cdot 2^{x+1}$, unde $a\in(0,\infty)$. Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ inversa funcției $g$. Determinați valoarea numărului $a$, știind că $g(32)=3$.

**4.** Determinați $x\in\mathbb{R}$, știind că $\sqrt{x^2+2x+6}=3$.

**5.** Determinați $x\in\mathbb{R}$, știind că $3^{3x+4}=9^{x+1}$.

**6.** Determinați $x\in\mathbb{R}$, știind că $\log_4(x^2+9)=2$.

### Testul 2*

**1.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\lg x$. Demonstrați că $\lg\left(\frac{10+100}{2}\right)>\frac{\lg 10+\lg 100}{2}$.

**2.** Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to(1,\infty)$, $f(x)=x^2+1$ este inversabilă și determinați inversa sa.

**3.** Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $\sqrt{x-1}=3-x$.

**4.** Determinați toate soluțiile reale ale ecuației $4^{x+1}-5\cdot 2^x+1=0$.

**5.** Determinați mulțimea soluțiilor ecuației $\log_x(6x-5)=2$.

**6.** Determinați toate numerele reale $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\frac{\sin x+2\cos x}{3}=\sin x$.

# 3. Probleme de numărare și combinatorică

## 3.1. Noțiuni teoretice

### 3.1.1. Reguli de numărare

**Regula produsului:** Dacă pentru situația $A$ există $m$ posibilități de realizare, iar pentru situația $B$ există $n$ posibilități de realizare, atunci realizarea simultană a situațiilor $A$ și $B$ este posibilă în $mn$ moduri.

**Regula sumei:** Dacă pentru situația $A$ există $m$ posibilități de realizare, iar pentru situația $B$ există $n$ posibilități de realizare, altele decât cele de la situația $A$, atunci realizarea cel puțin a uneia dintre situațiile $A$ sau $B$ este posibilă în $m+n$ moduri.

### 3.1.2. Submulțimi

Se consideră o mulțime $A$ cu $n$ elemente, unde $n \in \mathbb{N}$:

- numărul total de submulțimi cu $k \in \mathbb{N}$ elemente este egal cu $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
- numărul total de submulțimi ordonate formate cu $k$ elemente este egal cu $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$;
- numărul total de ordonări ale elementelor mulțimii $A$ este egal cu $P_n = n!$.

**Proprietăți:**

a) $A_n^k = C_n^k P_k$;
b) $C_n^k = C_n^{n-k}$;
c) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$;
d) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

### 3.1.3. Binomul lui Newton și alte formule

Sunt adevărate următoarele formule:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

**Binomul lui Newton:** $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$, unde $n \in \mathbb{N}$.

**Observații:** Pentru orice $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$, avem $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, numit termenul de ordin $k+1$.

## 3.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că numărul $x^2 - 4x + 4$ este pătrat perfect, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$.

**I2.** Demonstrați că $(x+2)^3 + (x-2)^3 = 2x(x^2+12)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**I3.** Într-o urnă sunt 4 bile albe, 6 bile galbene și 8 bile verzi. Se alege la întâmplare o bilă. Câte posibilități există pentru a alege o bilă care nu este verde?

**I4.** Într-o clasă de elevi sunt 12 fete și 16 băieți. În câte moduri putem forma o pereche de dansatori compusă dintr-un băiat și o fată?

**I5.** Calculați $C_6^4 + A_5^2 - P_3$.

**I6.** Demonstrați egalitatea $C_{10}^4 + C_{12}^5 = C_{12}^7 + C_{10}^6$.

**I7.** Câte submulțimi cu 3 elemente admite o mulțime formată din 5 elemente?





**I8.** Câte numere compuse din patru cifre distincte se pot forma folosind cifrele 2, 4, 6 și 8?

**I9.** Câte submulțimi ordonate formate cu 2 elemente admite mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$?

**I10*.** Se consideră dezvoltarea $(x+2)^5$. Determinați al treilea termen al dezvoltării.

## 3.3. Probleme de consolidare

**C1.** Câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 26?

*(Variante Bac, 2001)*

**C2.** Câte numere de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 1, 2 și 3?

*(Variante Bac, 2003)*

**C3.** Câte numere de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 2, 3, 4 și 5?

*(Variante Bac, 2007)*

**C4.** În câte moduri se poate îmbrăca Dan pentru un meci de tenis, dacă are 5 tricouri, 4 perechi de pantaloni scurți și 3 perechi de pantofi de sport?

**C5.** Aranjarea unor cărți pe un raft se poate face în 120 de moduri. Câte cărți sunt pe acel raft?

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A$ care conțin cel mult 3 elemente.

*(Variante Bac, 2007)*

**C7.** Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Demonstrați că numărul de submulțimi cu 4 elemente este mai mare decât numărul de submulțimi cu 5 elemente.

**C8.** Determinați toate funcțiile $f: \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$, cu proprietatea că $f(b) + f(c) = 4$.

**C9.** Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, cu proprietatea că $f(1) = f(4)$.

**C10.** Determinați numărul funcțiilor injective $f: \{a, b, c\} \to \{2, 4, 6, 8\}$.

**C11.** Câte numere cu patru cifre distincte se pot forma doar cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6, 7?

**C12.** Calculați:

a) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$; b) $A_5^3 - 6C_5^3$; c) $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C13.** Demonstrați că numărul $a = \frac{P_7 + P_8}{P_6}$ este natural.

**C14.** Demonstrați relația $A_{2012}^{123} = C_{2012}^{123} P_{123}$.

**C15.** Demonstrați că $C_6^3 = 2C_5^3$.

**C16.** Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A$ care au număr impar de elemente.

**C17.** Fie $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $A$, care conțin elementul 1.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18.** Aflați numărul de mulțimi $X$ care verifică $\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C19.** Se consideră mulțimea $A = \{0, 4, 8, 12\}$. Determinați numărul tripletelor $(a, b, c)$ de elemente ale lui $A$ cu proprietatea că $a < b < c$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C20.** Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Determinați numărul submulțimilor mulțimii $A$ care au 5 elemente, dintre care exact două sunt numere pare.

*(Variante Bac, 2009)*

**C21*.** Câte numere de trei cifre distincte, divizibile cu 5, se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5?

*(Variante Bac, 2008)*

**C22*.** Rezolvați în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{(n+2)!}{n!} = 12$.

**C23*.** Demonstrați relația $\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}$, valabile pentru orice $n, k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$.

**C24*.** Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.

*(Variante Bac, 2008)*

**C25*.** Determinați numerele naturale $n$ care sunt soluții ale ecuației $C_n^0 + C_n^1 = 2012$.

**C26*.** Determinați toate valorile naturale ale numărului $x$ pentru care $C_x^2 + A_x^2 = 30$.

**C27*.** Determinați al patrulea termen al dezvoltării $(2x + \sqrt[3]{x})^{10}$.

**C28*.** Considerăm dezvoltarea $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}\right)^{60}$. Demonstrați că termenul al 13-lea al dezvoltării este număr natural.

**C29*.** Determinați termenul care conține $\sqrt{a}$ din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^{12}$, $a > 0$.

**C30*.** Aflați termenul care nu conține $x$ din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{200}$, $x > 0$.

*(Variante Bac, 2009)*

### 3.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Câte numere de patru cifre se divid cu 5?

**2.** Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$, pentru care $f(1)$ este număr par.

**3.** Demonstrați că $C_7^4 = C_6^4 + C_6^3$.





**4.** Câte dicționare bilingve sunt necesare pentru a se putea face traduceri directe dintr-o limbă în alta printre limbile rusă, română, sârbă, maghiară și bulgară?

**5.** Considerăm în plan 100 puncte distincte, oricare trei necoliniare. Câte drepte determină aceste puncte?

**6.** Câte numere pare compuse din 5 cifre distincte se pot forma utilizând doar cifrele 2, 3, 5, 7?

#### Testul 2*

**1.** Câte numere de trei cifre distincte au toate cifrele pare?

**2.** Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, cu proprietatea că $f(1) \neq f(4)$.

**3.** Un tren de mare tonaj are 3 locomotive și 50 de vagoane, dispuse fiind la început cele trei locomotive și apoi vagoanele. În câte moduri se poate ordona garnitura de tren?

**4.** Demonstrați că $P_{11} - P_{10} = 10P_{10}$.

**5.** Demonstrați că $C_5^1 \cdot 2 + C_5^2 \cdot 2^2 + C_5^3 \cdot 2^3 + C_5^4 \cdot 2^4 + C_5^5 \cdot 2^5 = 728$.

**6.** Determinați numărul de termeni iraționali ai dezvoltării $(1 + \sqrt{2})^{11}$.

## 4. Matematici aplicate. Probabilități

### 4.1. Noțiuni teoretice

#### 4.1.1. Probabilități

**Definiție clasică: Probabilitatea** realizării unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul de cazuri posibile asociate acelui eveniment.

**Observații:**

- probabilitatea este întotdeauna egală cu un număr din intervalul $[0, 1]$;
- evenimentul cu probabilitatea egală cu 0 se numește **evenimentul imposibil**;
- evenimentul cu probabilitatea egală cu 1 se numește **evenimentul sigur**.

#### 4.1.2. Matematici financiare

**Procente:** Dacă $a, b, p \in [0, \infty)$, $b \neq 0$ astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{p}{100}$, atunci spunem că $a$ reprezintă $p\%$ din $b$.

**TVA-ul:**

- este un impozit perceput de stat și care se aplică la toate produsele și serviciile, înaintea prețului de vânzare;
- cota corespunzătoare este stabilită prin lege și depinde de tipul produselor și al serviciilor.
- este adevărată relația: **preț producție + TVA = preț vânzare.**

**Dobânzi:** Considerăm $S$ o sumă inițială care se depune la bancă cu o rată a dobânzii de $p\%$ pe unitatea de timp. Fie $S_n$ suma totală obținută după $n$ unități de timp, iar $D_n$ dobânda obținută după $n$ unități de timp:

- avem $S_n = S + D_n$;
- în regim de **dobândă simplă**, avem $S_n = S(1 + np\%)$;
- în regim de **dobândă compusă**, avem $S_n = S(1 + p\%)^n$.

### 4.2. Probleme de inițiere

**I1.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Dintre aceștia 25% sunt pasionați de fotbal. Care este numărul elevilor care nu sunt pasionați de fotbal?

**I2.** Dintre elevii unei clase, 60% sunt pasionați de fotbal, alți 28% de baschet, iar restul de 3 elevi de volei. Câți elevi sunt în componența clasei?

**I3.** Un produs are prețul inițial de 200 lei. Acest preț se micșorează cu 10%. Determinați prețul final al produsului.

**I4.** Suma de 500 lei a fost depusă la o bancă cu o rată a dobânzii de 8% pe an. Calculați dobânda obținută după un an.

**I5.** Cota TVA-ului în România este 24%. Care este prețul de vânzare al unui produs, știind că prețul de producție este de 400 lei?

**I6.** Suma de 200 lei este depusă la bancă în regim de dobândă simplă, cu o rată a dobânzii de 1% pe lună. Ce sumă finală se obține după 3 luni?

**I7.** Suma de 200 lei este depusă la bancă în regim de dobândă compusă, cu o rată a dobânzii de 10% pe an. Ce sumă finală se obține după un an?

**I8.** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect?

**I9.** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o submulțime a mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$, această submulțime să fie nevidă?

**I10.** Se aruncă la întâmplare un zar de forma unui cub cu fețe numerotate diferit de la 1 la 6. Care este probabilitatea ca numărul obținut să fie divizibil cu 3.

### 4.3. Probleme de consolidare

**C1.** Cu ce procent trebuie majorat prețul unui produs pentru a realiza o creștere de preț de la 120 lei la 126 lei?

**C2.** Prețul unui produs este de 5400 lei. Cu ce procent trebuie ieftinit produsul pentru ca acesta să coste 4860 lei?

*(Variante Bac, 2009)*

**C3.** Aflați prețul inițial al unui produs dacă, după o scumpire cu 15%, costă 460 lei.

*(Variante Bac, 2009)*





**C4.** Un produs costă 200 lei. El se scumpește succesiv o dată cu 10% și apoi din nou cu 5%. Aflați prețul final al produsului.

*(Variante Bac, 2008)*

**C5.** Un produs se scumpește cu 11%, ceea ce înseamnă 22 lei. Determinați prețul final al produsului.

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Prețul de vânzare al unui produs se obține prin adăugare la prețul de fabricație a unui TVA de 9%, adică 8,1 lei. Calculați prețul de vânzare al produsului.

**C7.** Calculați TVA-ul pentru un produs, știind că prețul de vânzare al produsului este de 238 lei (procentul TVA-ului este de 19%).

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Prețul de vânzare al unui produs se obține prin adăugarea la prețul de fabricație a unui TVA de $p\%$. Calculați valoarea numărului $p$, dacă prețul de producție al unui obiect este 3000 lei, iar prețul de vânzare al aceluiași obiect este 3240 lei.

**C9.** Suma de 1000 lei este depusă la bancă, obținându-se după un an o dobândă de 125 lei. Care este procentul de dobândă acordat de bancă pe perioada acelui an?

*(Variante Bac, 2009)*

**C10.** O sumă de 2000 lei este depusă la bancă pentru un an, la finalul căruia suma finală devine 2160 lei. Determinați procentul corespunzător dobânzii acordate.

*(Variante Bac, 2008)*

**C11.** O sumă de bani este depusă la o bancă în regim de dobândă simplă, 1% pe lună. Suma rezultată din dobândă este depusă lunar într-un alt cont fără dobândă, astfel încât în acest cont se strâng după un an 240 lei. Ce sumă a fost depusă inițial?

*(Variante Bac, 2008)*

**C12.** O sumă de bani este depusă la bancă în regim de dobândă compusă timp de 2 ani, cu o dobândă de 10% pe an, astfel că suma finală este 2420 lei. Calculați suma inițială.

*(Variante Bac, 2008)*

**C13.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare o soluție reală a ecuației $4x^2 - 5x + 1 = 0$, aceasta să fie număr natural.

**C14.** Care este probabilitatea ca un număr de trei cifre să aibă produsul cifrelor egal cu 7?

**C15.** Calculați probabilitatea ca un element $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ să verifice relația $2^n \leq 3 + \log_2 n$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C16.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural format din trei cifre, acesta să aibă cifre diferite.

**C17.** Se consideră mulțimea $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare o submulțime a mulțimii $A$, aceasta să aibă exact 2 elemente?

**C18.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Alegem la întâmplare o submulțime a lui $A$. Calculați probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă cel mult trei elemente.

*(Variante Bac, 2009)*

**C19.** Care este probabilitatea ca un element $x$ al mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4\}$ să verifice relația $A_4^x=12$?

**C20.** Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A=\{C_7^0, C_7^1, C_7^2, C_7^3\}$, acesta să fie divizibil cu 7?

**C21*.** Prețul unui produs este majorat cu un adaos comercial de 10%. La noul preț se face o nouă majorare de 5%, iar prețul final este 231 lei. Determinați prețul inițial.

*(Variante Bac, 2008)*

**C22*.** Un produs se scumpește cu 10%. Apoi se ieftinește cu 10%. Determinați ce procent reprezintă prețul final din prețul inițial.

**C23*.** Dintre elevii unei clase, 40% practică fotbalul și 50% practică baschetul. Știind că 15% dintre elevii clasei nu fac sport, calculați procentul de elevi din clasă care practică ambele sporturi.

**C24*.** Într-o clasă, la un test au fost absenți 20% dintre elevi. Dintre cei prezenți, 25% nu au luat notă de trecere. Ce procent din numărul total de elevi din clasă este reprezentat de elevii care au promovat testul?

**C25*.** O sumă de bani este depusă la bancă cu regim de dobândă simplă. Timp de 3 luni, banca a oferit o dobândă de 2% pe lună. Apoi, timp de încă 7 luni, banca a oferit o dobândă de doar 1% pe lună. Ce rată a dobânzii ar fi trebuit să acorde banca pentru a se obține la final aceeași sumă, dacă în fiecare dintre cele 10 luni rata nu s-ar fi modificat?

**C26*.** Suma de 1000 de lei este depusă la bancă în regim de dobândă compusă pentru o perioadă de 2 ani. La final, se obțin 1440 lei. Calculați procentul reprezentat de dobânda anuală.

**C27*.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

*(Variante Bac, 2009)*

**C28*.** Se alege, la întâmplare, o funcție $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care este probabilitatea ca funcția aleasă să fie injectivă?

**C29*.** Într-o clasă de elevi sunt 11 fete și 18 băieți. Se aleg la întâmplare 5 elevi. Calculați probabilitatea ca printre elevii aleși să fie exact 3 băieți.

*(Variante Bac, 2008)*

**C30*.** Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Alegem la întâmplare o submulțime dintre submulțimile nevide ale lui $A$. Calculați probabilitatea ca submulțimea aleasă să aibă toate elementele impare.

*(Variante Bac, 2009)*

### 4.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** O sumă de 1000 lei a fost depusă la o bancă și după un an s-a obținut o dobândă de 80 lei. Calculați rata dobânzii.

**2.** După o reducere de 20%, prețul unui produs este de 320 lei. Aflați prețul înainte de reducere.





**3.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere consecutive în ordine crescătoare.

**4.** Determinați ce procent din $a + b$ reprezintă numărul $a$, știind că $a$ este egal cu 25% din $b$.

**5.** Determinați probabilitatea ca un element al mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ să fie soluție a inecuației $\log_2 n \geq \frac{n-1}{2}$.

**6.** Prețul de producție al unui produs este de 200 lei, iar prețul de vânzare obținut după aplicarea TVA-ului este de 208 lei. Calculați procentul corespunzător TVA-ului.

#### Testul 2*

**1.** Determinați probabilitatea ca un număr de patru cifre distincte să aibă toate cifrele nenule.

**2.** Prețul de vânzare al unui produs este de 357 lei și este obținut prin aplicarea TVA-ului de 19% la prețul de producție. Determinați prețul de producție.

**3.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar.

**4.** O sumă de bani este depusă la bancă cu o dobândă de 1% pe lună în regim de dobândă simplă. După 2 ani, suma totală din bancă a devenit 3720 euro. Determinați suma inițială care a fost depusă în bancă.

**5.** În clasa a X-a B sunt 30 de elevi, din care 60% sunt băieți. În clasa a X-a C sunt 20 de elevi, din care 75% sunt fete. Ce procent din numărul total de elevi ai celor două clase este reprezentat de numărul fetelor?

**6.** O sumă de bani este depusă la bancă în regim de dobândă compusă cu o rată a dobânzii de 30% pe an. Determinați numărul minim de ani necesari pentru ca suma rezultată să fie cel puțin dublă față de suma inițială.

## 5. Geometrie analitică

### 5.1. Noțiuni teoretice

#### 5.1.1. Puncte în sistem de coordonate

Se consideră un sistem de axe ortogonale (perpendiculare) $xOy$. Pentru orice punct $M$ din plan există și sunt unice numerele reale $x_M, y_M$, numite coordonate. Notăm $M(x_M, y_M)$, unde $x_M$ este abscisa, iar $y_M$ este ordonata.

Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ și $D(x_D, y_D)$. Atunci au loc relațiile:

• Formula distanței $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$;

• Mijlocul $M$ al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$;

• Dacă $N \in [AB]$ pentru care $\frac{NA}{NB} = k$, atunci $x_N = \frac{x_A + kx_B}{1+k}$, $y_N = \frac{y_A + ky_B}{1+k}$;

• Centrul de greutate al triunghiului $ABC$ are coordonatele $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$;

• $ABCD$ este paralelogram dacă și numai dacă $x_A + x_C = x_B + x_D$, $y_A + y_C = y_B + y_D$.

### 5.1.2. Ecuația dreptei

Ecuația generală a unei drepte $d$: $ax + by + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Punctul $M(x_M, y_M) \in d$ dacă și numai dacă $ax_M + by_M + c = 0$.

Distanța de la $M(x_M, y_M)$ la $d: ax + by + c = 0$ este egală cu $\text{dist}(M, d) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Dacă $b = 0$, se obține ecuația de forma $x = x_0$, care este forma generală a unei drepte verticale.

Dacă $a = 0$, se obține ecuația de forma $y = y_0$, care este forma generală a unei drepte orizontale.

Fie $d$ o dreaptă oblică. Tangenta unghiului format în sens trigonometric de axa $Ox$ cu dreapta $d$ reprezintă **panta dreptei**.

Dacă $ab \neq 0$, ecuația dreptei se poate aduce la forma $y = mx + n$, unde $m$ reprezintă panta dreptei $d$.

**Teoremă:** Fie $a$, $b$ două drepte distincte de pantă $m_a$ și, respectiv, $m_b$. Atunci:

**P1:** $a \parallel b \Leftrightarrow m_a = m_b$; **P2:** $a \perp b \Leftrightarrow m_a m_b = -1$.

### 5.1.3. Vectori în sistem de coordonate

Vectorul determinat de punctele $(0,0)$ și $(1,0)$ se notează cu $\vec{i}$, iar vectorul determinat de punctele $(0,0)$ și $(0,1)$ se notează cu $\vec{j}$. Cei doi vectori se numesc **versorii** axelor. Pentru orice vector $\vec{u}$ există numerele reale unice $u_1, u_2$, astfel încât $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$.

Avem egalitatea $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Fie vectorii $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$. Atunci:

**P1.** $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$ și $u_2 = v_2$; **P2.** $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$; **P3.** $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j}$;

**P4.** $\alpha\vec{u} = \alpha u_1\vec{i} + \alpha u_2\vec{j}$; **P5.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$; **P6.** $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1)\vec{i} + (u_2 - v_2)\vec{j}$.

Legătura dintre puncte și vectori: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$.

## 5.2. Probleme de inițiere

**I1.** Determinați coordonatele mijlocului segmentului format de punctele $A(2, 5)$ și $B(4, 11)$.





**I2.** Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului $ABC$, dacă $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$.

**I3.** Calculați lungimea segmentului format de punctele $A(2, 5)$ și $B(6, 8)$.

**I4.** Demonstrați că punctele $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(9, 9)$ și $D(7, 5)$ reprezintă vârfurile unui paralelogram.

**I5.** Demonstrați că punctul $M(1, 2)$ aparține dreptei $d: 2x + 3y - 8 = 0$.

**I6.** Demonstrați că dreptele $a: 2x + 4x - 1 = 0$ și $b: x + 2y + 3 = 0$ sunt paralele.

**I7.** Considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(2, 5)$. Determinați numerele reale $a$, $b$, astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

**I8.** Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$ și $\vec{w} = 3\vec{i} + 19\vec{j}$. Demonstrați că $\vec{w} = 4\vec{u} - \vec{v}$.

**I9.** Determinați modulul vectorului $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$.

**I10.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calculați modulul vectorului $\overrightarrow{AC}$.

## 5.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie $ABC$ un triunghi, iar $G$ centrul său de greutate. Dacă $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $G(3, 4)$, aflați coordonatele punctului $C$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** În reperul cartezian $xOy$, considerăm punctele $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ și $C(4, 3)$. Demonstrați că triunghiul $ABC$ este isoscel.

**C3.** Fie punctele $A(1, 2)$, $B(7, 4)$ și $C(5, 6)$ și $M$ mijlocul segmentului $BC$. Demonstrați că $2AB^2 + 2AC^2 = 4AM^2 - BC^2$.

**C4.** Determinați coordonatele vârfului $D$ al paralelogramului $ABCD$, dacă $A(-2, 9)$, $B(7, -4)$, $C(8, -3)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A_n\left(\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \log_3 9^n\right)$ și $B_n(-n, 2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că $A_n = B_n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C6.** Se consideră punctul $A(2, 4)$. Determinați coordonatele simetricului punctului $A$ față de originea $O$.

**C7.** Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Demonstrați că $\vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w} = 0$.

**C8.** Determinați numerele reale $a$, $b$, știind că vectorii $\vec{u} = (2a + 1)\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = -\vec{i} + (b + 1)\vec{j}$ sunt egali.

**C9.** Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (a - 2)\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} - (2 - 2a)\vec{j}$ sunt coliniari.

**C10.** În sistemul de axe $xOy$ se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ și $D(7, 5)$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

**C11.** Fie punctele $A(1, 1)$, $B(7, 3)$, $C(4, 5)$ și $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Demonstrați că $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$.

**C12.** Se consideră reperul cartezian $xOy$ și punctele $A(1, -1)$ și $B(3, 5)$. Determinați coordonatele punctului $C$ din plan, astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C13.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(0, -2)$ și $B(2, 0)$ să aparțină dreptei $d: y = ax + b$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C14.** Determinați punctele de intersecție ale dreptei $d: x + 3y - 7 = 0$ cu axele de coordonate.

*(Variante Bac, 2007)*

**C15.** Determinați ecuația dreptei care trece prin $O$ și mijlocul segmentului $AB$, unde $A(4, 0)$ și $B(0, 2)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C16.** Se consideră dreapta $d$ de ecuație $x - 2y + 1 = 0$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4, -1)$ și este paralelă cu dreapta $d$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C17.** Calculați distanța de la punctul $A(3, 4)$ la dreapta de ecuație $x + y + 3 = 0$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C18.** În sistemul de coordonate $xOy$, considerăm punctele $A(-1, 1)$, $B(1, 3)$ și $C(3, 2)$. Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Determinați ecuația dreptei $OG$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C19.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor $a: 2x + y - 4 = 0$ și $b: x + 3y - 7 = 0$.

**C20.** Se consideră punctul $A(1, 3)$. Notăm cu $B$ și $C$ proiecțiile punctului $A$ pe $Ox$, respectiv $Oy$. Calculați lungimea segmentului $BC$.

**C21*.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctul $A(2, 3)$. Știind că punctele $B$ și $C$ sunt simetricele punctului $A$ față de axele $Ox$, respectiv $Oy$, calculați lungimea segmentului $BC$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C22*.** Se consideră vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Determinați $p, q \in \mathbb{R}$, pentru care $\vec{u} = p\vec{a} + q\vec{b}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C23*.** Se consideră dreptele de ecuații $d_1: 2x + 3y + 1 = 0$, $d_2: 3x + y - 2 = 0$ și $d_3: x + y + a = 0$. Determinați $a$ pentru care dreptele sunt concurente.

*(Variante Bac, 2009)*

**C24*.** Demonstrați că patrulaterul $MNPQ$ cu vârfurile $M(2, 0)$, $N(6, 4)$, $P(4, 6)$ și $Q(0, 2)$ este dreptunghi.

*(Variante Bac, 2009)*

**C25*.** În sistemul cartezian $xOy$ considerăm $A(-1, 3)$ și $B(1, -1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $AB$.

*(Variante Bac, 2009)*





**C26*.** Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ și $C(3, 7)$. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

**C27*.** Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} - a\vec{j}$. Determinați valoarea numărului real $a$, pentru care $\vec{u} \perp \vec{v}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C28*.** Determinați valoarea produsului scalar al vectorilor $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$. Calculați apoi cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

**C29*.** Fie punctele $A(a, a)$, $B(5, 3)$ și $C(3, 7)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile lui $a$ pentru care $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

**C30*.** Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(7, 5)$ și $C(-2, 2)$. Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Demonstrați că $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

## 5.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(1, 2)$ și $C(a, b)$. Determinați numerele reale $a$, $b$, știind că punctul $B$ este mijlocul segmentului $AC$.

**2.** Se consideră punctele $A(1, 5)$, $B(3, -1)$ și $O(0, 0)$. Fie $M$ mijlocul segmentului $AB$. Demonstrați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.

**3.** Demonstrați că dreptele de ecuații $a: 3x - 2y + 1 = 0$ și $b: 4x + 6y + 2 = 0$ sunt perpendiculare.

**4.** Determinați numărul $a \in \mathbb{R}$, știind că punctul $A(a, a+1)$ aparține dreptei $d: 3x - 2y - 5 = 0$.

**5.** Se consideră vectorul $\vec{u} = \vec{i} + j$. Determinați modulul vectorului $2\vec{u}$.

**6.** Considerăm punctele $A(3, 2)$, $B(5, 4)$, $C(0, -2)$ și $D(-2, 0)$. Demonstrați că $AB = CD$.

### Testul 2*

**1.** Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-3, 2)$ față de mijlocul segmentului $BC$, unde $B(1, -4)$ și $C(-5, -1)$.

**2.** Determinați ecuația medianei duse din vârful $A$ al triunghiului $ABC$, unde $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(2, -5)$.

**3.** Determinați ecuația dreptei care conține punctul $A(-2, 2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2, 1)$ și $D(-1, -3)$.

**4.** Determinați numărul real $a$, pentru care dreptele de ecuații $x + 2y + 1 = 0$ și $2x - ay - 1 = 0$ sunt perpendiculare.

**5.** Determinați valorile numărului real $a$, pentru care vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - 3\vec{j}$ au module egale.

**6.** Fie vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Demonstrați egalitatea: $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + 2\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.

# 6. Numere complexe*

## 6.1. Noțiuni teoretice

### 6.1.1. Mulțimea numerelor complexe

$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,\ b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$

**Observație:** Dacă $z=a+bi$, atunci $\operatorname{Re} z=a$ și $\operatorname{Im} z=b$.

**Observație:** Două numere complexe $z_1=a_1+b_1i$ și $z_2=a_2+b_2i$ sunt egale dacă $a_1=a_2$ și $b_1=b_2$.

**Puterile unității imaginare** $i$: $i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$, $(\forall)\ k\in\mathbb{N}$.

**Definiție:** Numim **conjugatul** numărului complex $z=a+bi$ și notăm $\overline{z}$ ca fiind numărul complex $a-bi$.

**Proprietățile conjugatului:** Pentru orice numere complexe au loc relațiile:

**P1.** $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

**P2.** $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

**P3.** $\overline{(z_1:z_2)}=\overline{z_1}:\overline{z_2}$;

**P4.** $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$, $n\in\mathbb{N}^*$;

**P5.** $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

**Modulul unui număr complex:** Dacă $z=a+bi\in\mathbb{C}$, atunci **modulul** său este $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

**Proprietățile modulului:** Pentru orice numere complexe au loc relațiile:

**P1.** $|z|\in[0,\infty)$;

**P2.** $|z|=0\Leftrightarrow z=0$;

**P3.** $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$;

**P4.** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$;

**P5.** $|z^n|=|z|^n$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$;

**P6.** $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$;

**P7.** $z\cdot\overline{z}=|z|^2$.

### 6.1.2. Elemente de geometrie cu numere complexe

Pentru orice număr complex $z=a+bi$ există în plan un punct $M(a,\ b)$, numit **imaginea geometrică** a numărului complex. Vom nota $M(z)$ și atunci $z$ devine **afixul** punctului $M$.

**Formule importante:** Se consideră punctele $A(z)$, $B(v)$ și $C(w)$:

- formula distanței $AB=|z-v|$;
- mijlocul segmentului $AB$ are afixul $\frac{z+v}{2}$;
- centrul de greutate al triunghiul $ABC$ are afixul $\frac{z+v+w}{3}$.





## 6.2. Probleme de inițiere

**I1*.** Fie $z=(2x+1)+(3x-2)i$. Determinați $x\in\mathbb{R}$, pentru care $\operatorname{Re} z=5$.

**I2*.** Calculați $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.

**I3*.** Calculați $i\cdot i^2\cdot\ldots\cdot i^{10}$.

**I4*.** Determinați partea imaginară a numărului $z=\frac{2+3i}{3-2i}$.

**I5*.** Demonstrați că $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}\in\mathbb{Z}$.

**I6*.** Determinați $a,\ b\in\mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(2+3i)^2=a+ib$.

**I7*.** Determinați $z\in\mathbb{C}$, dacă $z+3i=6\overline{z}$.

**I8*.** Determinați soluțiile complexe ale ecuației $x^2-6x+10=0$.

**I9*.** Fie punctele $A(1+i)$ și $B(5+3i)$. Calculați lungimea segmentului $AB$.

**I10*.** Determinați modulul numărului complex $z=2+i\sqrt{21}$.

## 6.3. Probleme de consolidare

**C1*.** Calculați: a) $1+i+i^2+\ldots+i^{10}$; b) $i^{22}+i^{33}+i^{44}+i^{55}$.

**C2*.** Calculați: a) $(2+i)(3-2i)-(1-i)$; b) $\frac{1+4i}{4+7i}+\frac{1-4i}{4-7i}$; c) $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$.

**C3*.** Demonstrați că $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}\in\mathbb{R}$.

**C4*.** Demonstrați că: a) $(1+i\sqrt{3})^2+(1-i\sqrt{3})^2\in\mathbb{Z}$; b) $(1-i)^{24}\in\mathbb{R}$.

**C5*.** Determinați partea reală a numărului $z=\frac{2-i}{3i+4}$.

**C6*.** Determinați $a,\ b\in\mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1-i\sqrt{3})^3=a+ib$.

**C7*.** Dacă $z=2-3i$, $w=4+i$, determinați partea reală a numărului $zw+\overline{zw}$.

**C8*.** Determinați numerele reale $x,\ y$, pentru care $(2-3i)x+(4+i)y=10-i$.

**C9*.** Se consideră $a\in\mathbb{R}$ și numărul complex $z=\frac{a+2i}{2+ai}$. Determinați $a$ pentru care $z\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C10*.** Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât numărul $z=\frac{1}{a(1+i)+1-2i}$ să aibă partea reală egală cu $\frac{2}{5}$.

**C11*.** Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Arătați că $z^2=\overline{z}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12*.** Determinați $z\in\mathbb{C}$, dacă: a) $2\overline{z}+z=3+4i$; b) $\frac{\overline{z}+7i}{z}=6$; c) $z+|z|=8+4i$.

**C13*.** Determinați numerele complexe $z$ care verifică egalitatea $z^2=\overline{z}$.

**C14*.** Calculați modulele numerelor complexe:

a) $z_1=(3-4i)(1+i)$; b) $z_2=\sqrt{2}-1+i\left(\sqrt{2}+1\right)$; c) $z_3=\frac{8+i}{7-4i}$.

**C15*.** Determinați modulul numărului $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2009}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C16*.** Dacă numărul $z\in\mathbb{C}$ astfel încât $|z|=1$, atunci calculați expresia $z\cdot\overline{z}-2$.

*(Variante Bac, 2004)*

**C17*.** Determinați soluțiile complexe ale ecuațiilor:

a) $4x^2+4x+5=0$; b) $x^2-8x+17=0$.

**C18*.** Determinați toate soluțiile complexe ale ecuației $x^3=8$.

**C19*.** Determinați toate soluțiile complexe ale ecuațiilor:

a) $x^4-5x^2-36=0$; b) $x^6+7x^3-8=0$.

**C20*.** Fie numărul complex $z$ pentru care $|z|=\sqrt{11}$. Demonstrați că $\frac{z^2+11}{z}\in\mathbb{R}$.

**C21*.** Demonstrați că $\frac{zw-\overline{z}\overline{w}}{i}\in\mathbb{R}$, $\forall\, z, w\in\mathbb{C}$.

**C22*.** Fie numărul $\varepsilon\in\mathbb{C}-\mathbb{R}$, astfel încât $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Calculați suma $(1+\varepsilon)^{12}+\left(1+\varepsilon^2\right)^{24}$.

**C23*.** Se consideră punctele $A(1+i)$, $B(3+5i)$, $C(2+9i)$. Determinați afixul centrului de greutate al triunghiului $ABC$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C24*.** Fie $\Delta ABC$ cu $A(1+i)$, $B(3+2i)$ și centrul de greutate $G(2-i)$. Determinați afixul lui $C$.

**C25*.** Dacă triunghiul $ABC$ are $A(1+i)$, $B(5+3i)$ și $C(3+7i)$, calculați perimetrul său.

**C26*.** Se consideră punctele $X(2+2i)$, $Y(2-2i)$, $Z(-2i)$, $W(2i)$. Demonstrați că $XYZW$ este dreptunghi.

**C27*.** Determinați afixul punctului $D$ al paralelogramului $ABCD$ dacă sunt cunoscute afixele: $A(1+i)$, $B(3+5i)$, $C(2+9i)$.

**C28*.** Fie punctele $A(2+4i)$, $B(3+6i)$, $C(-4-8i)$. Demonstrați că sunt coliniare.

*(Variante 2009)*





**C29*.** Fie triunghiul $ABC$, în care avem $z_A=2+i$, $z_B=6+3i$, $z_C=4+5i$. Notăm cu $M$ mijlocul lui $BC$. Determinați lungimea segmentului $AM$.

**C30*.** Fie triunghiul $ABC$ și $G$ centrul său de greutate. Dacă $z_A=1+3i$, $z_B=3-2i$, $z_C=-1-i$, determinați afixul unui punct $M$ pentru care $BGCM$ este paralelogram.

## 6.4. Test de verificare

### Testul 1*

**1.** Demonstrați că numărul $z=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.

**2.** Determinați toate valorile posibile ale numărului real $a$, pentru care numărul complex $z=a+4i$ are modulul egal cu 5.

**3.** Determinați rădăcinile complexe ale ecuației $4x^2-12x+13=0$.

**4.** Demonstrați că $i+i^2+i^3+\ldots+i^{100}=0$.

**5.** Se consideră punctele $A(1+2i)$, $B(5+4i)$ și $C(-1+8i)$. Fie $M$, $N$ și $P$ mijloacele laturilor $BC$, $CA$ și, respectiv, $AB$. Demonstrați că afixele centrelor de greutate ale triunghiurilor $ABC$ și $MNP$ sunt egale.

**6.** Fie $z\in\mathbb{C}$ oarecare. Demonstrați că $i\left(z-\overline{z}\right)\in\mathbb{R}$.

# Clasa a XI-a

## 1. Matrice

### 1.1. Noțiuni teoretice

#### 1.1.1. Generalități

**Forma generală:** $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se numesc **coeficienți.**

Notăm cu $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ mulțimea matricelor cu $m$ linii și $n$ coloane și coeficienți în mulțimea $K$.

Dacă $m=n$, matricele se numesc **pătratice** și avem $\mathcal{M}_{n\times n}(K)\overset{not}{=}\mathcal{M}_n(K)$.

**Cazuri particulare:** $O_n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ **– matricea nulă,** $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ **– matricea unitate.**

Fiind dată matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, **transpusa** sa este matricea ${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in$

$\in\mathcal{M}_{n\times m}(K)$.

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ și $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.





#### 1.1.2. Relații între matrice și operații

**Egalitatea a două matrice:**

Avem $A=B$ dacă $a_{ij}=b_{ij}$, pentru orice $i\in\{1, 2, \dots, m\}$ și $j\in\{1, 2, \dots, n\}$.

Dacă $A=B$ și $B=C$, atunci $A=C$.

**Adunarea matricelor:**

Avem $A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

**Proprietățile adunării matricelor:** Adunarea matricelor este o operație:

- asociativă, adică $(A+B)+C=A+(B+C)$, pentru orice $A, B, C\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$;
- care admite element neutru, adică $A+O_n=O_n+A=A$, pentru orice $A\in\mathcal{M}_n(K)$.

**Înmulțirea matricelor cu un scalar:**

Avem $\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$, pentru orice $\alpha\in K$ și $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

**Proprietăți ale înmulțirii matricelor cu un scalar:** Sunt adevărate relațiile $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ și $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$, pentru orice $\alpha, \beta\in K$ și $A, B\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$.

**Înmulțirea matricelor:**

Dacă $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ și $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n\times p}(K)$, atunci $AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}\in$

$\in\mathcal{M}_{m\times p}(K)$, unde $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, pentru orice $i\in\{1, 2, \dots, m\}$ și $j\in\{1, 2, \dots, n\}$.

**Proprietățile înmulțirii matricelor:** Operația de înmulțire a matricelor:

- este asociativă;
- în general nu este comutativă;
- operația de înmulțire a matricelor pătratice admite element neutru matricea unitate $I_n$;
- este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

**Puterile unei matrice pătratice:**
Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

**Propoziție:** Sunt adevărate relațiile $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$ și $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$.

### 1.1.3. Urma unei matrice pătratice

Dacă $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci **urma** sa este $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

**Proprietăți:** Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ și $\alpha \in K$, avem:
**T1.** $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$; **T2.** $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$; **T3.** $Tr(AB) = Tr(BA)$.

## 1.2. Probleme de inițiere

**I1.** Determinați valorile numerelor reale $a$, $b$, pentru care matricele $A = \begin{pmatrix} 2a+3 & 4 \\ 3b-5 & 7 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}$ sunt egale.

**I2.** Calculați suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

**I3.** Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determinați matricea $-3A$.

**I4.** Determinați produsul matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

**I5.** Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $B^2$.

**I6.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2 - 7A = 2I_2$.

**I7.** Pentru matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ demonstrați că $Tr(A) = Tr(B)$.





**I8.** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $A^2 = xA$.

**I9.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = BA$.

**I10.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați cel mai mic număr natural $n$, pentru care $A^n = O_2$.

## 1.3. Probleme de consolidare

**C1.** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real $a$, matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2a+5 \\ 3 & 3a+2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ nu pot fi egale.

**C2.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $(2x+2)A - (3x+3)B = O_2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**C3.** Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Determinați suma elementelor matricei $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_5$.

*(Variante Bac, 2005)*

**C4.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = O_2$.

*(Variante Bac, 1996)*

**C5.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Știind că $2X - AB = A$, calculați $a + b + c + d$.

**C6.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^3 = 6I_3$.

**C7.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Arătați că există $d \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^2 = dA$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C8.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculați suma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{20}$.

**C9.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Demonstrați că suma elementelor matricei $A^4$ este număr natural impar.

**C10.** Fie $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^{2014}\neq I_2$.

**C11.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}6&6\\-5&-5\end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^{2012}-A^{2011}=O_2$.

**C12.** Fie $A=\begin{pmatrix}0&3&4\\4&5&6\\5&6&7\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a&a&a\\a&a&a\\a&a&a\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați matricea $B$ cu proprietatea $Tr(B)=Tr(A)$.

**C13.** Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Determinați $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, astfel încât $AB=I_2$.

**C14.** Fie matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+a&a\\-a&1-a\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $X(a)X(b)=X(a+b)$, pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Fie matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1+3a&3a\\-2a&1-2a\end{pmatrix}$. Demonstrați că $X(a)X(-1)=X(-1)X(a)=X(-1)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C16*.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

**C17*.** Determinați numărul matricelor de forma $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ care verifică condițiile $a, b, c, d\in\mathbb{N}^*$, $a, b, c, d$ distincte și $a+b+c+d=10$.

**C18*.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4\\3&5\end{pmatrix}$. Determinați matricele $X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică $\begin{cases}2X+3Y=A\\X+2Y=B\end{cases}$.

**C19*.** Demonstrați că $Tr(XY)=Tr(YX)$, pentru orice $X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.





**C20*.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3&5\\-2&-3\end{pmatrix}$. Calculați $A^{2014}$.

### 1.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Demonstrați că matricele $A=\begin{pmatrix}2&4\\10&6\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&2\\5&3\end{pmatrix}$ verifică relația $A-2B=O_2$.

**2.** Determinați valorile reale ale numerelor $a, b, c, d$ pentru care matricea $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ verifică relația $2B+6I_2=O_2$.

**3.** Pentru orice $m\in\mathbb{R}$, definim matricea $X(m)=\begin{pmatrix}1&0\\m&1\end{pmatrix}$. Demonstrați că $X(3)\cdot X(7)=X(10)$.

**4.** Fie $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$. Fie $C=AB-BA$. Determinați $Tr(C)$.

**5.** Determinați cel mai mic număr natural $n$ nenul pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}2&-3\\1&-1\end{pmatrix}$ verifică condiția $A^n=I_2$.

**6.** Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Calculați $A^6$.

#### Testul 2*

**1.** Determinați valorile reale ale numerelor $x$ și $y$, pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}-2&3\\-4&5\end{pmatrix}$ verifică relația $A^2+xA+yI_2=O_2$.

**2.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$. Calculați suma $A+A^2+A^3+A^4$.

**3.** Considerăm matricea $X(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\lg a\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,\infty)$. Demonstrați că $X(b)\cdot X(c)=X(bc)$.

**4.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\b&0&0\\c&b&0\end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^{2014}=O_3$, oricare ar fi $b,\ c\in\mathbb{R}$.

**5.** Fie $G=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\mid Tr(A)=0\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $B,\ C\in G$, avem $B+C\neq I_2$.

**6.** Determinați cel mai mic număr natural $n$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix}3&3\\-1&-1\end{pmatrix}$ verifică relația $A^n=64A$.

## 2. Determinanți

### 2.1. Noțiuni teoretice

Determinantul unei matrice este o caracteristică numerică specifică matricelor pătratice. Determinantul matricei $A$ îl notăm $\det(A)$. Avem $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$ și $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{vmatrix}=aej+bfg+cdh-ceg-ahf-bdj$.

**Proprietăți:** Pentru orice $A,\ B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\alpha\in\mathbb{R}$, avem:

**D1.** $\det({}^tA)=\det(A)$; **D2.** $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$; **D3.** $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

**Proprietăți care implică liniile sau coloanele unui determinant:**
**P1.** Un determinant cu o linie (coloană) nulă este de asemenea nul.
**P2.** Un determinant cu două linii (coloane) identice este nul.
**P3.** Dacă inversăm două linii (coloane) ale unui determinant, atunci determinantul își schimbă semnul.
**P4.** Într-un determinant, putem da factor comun din elementele oricărei linii (coloane).
**P5.** Într-un determinant, la elementele unei linii (coloane) putem aduna elementele oricărei alte linii (coloane) înmulțite cu orice număr și valoarea determinantului nu se modifică.

**Teorema Hamilton–Cayley:** Pentru orice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, este adevărată relația $A^2-Tr(A)A+\det(A)I_2=O_2$.

### 2.2. Probleme de inițiere

**I1.** Calculați determinanții: $A=\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{vmatrix}$.





**I2.** Calculați determinanții: $\Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&0\\6&0&0\end{vmatrix}$ și $\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&3\\-2&0&4\end{vmatrix}$.

**I3.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&4\\3&-2\end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2=-\det(A)I_2$.

**I4.** Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1&3\\-2&2\end{pmatrix}$. Verificați relația $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.

**I5.** Fie matricea $C=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix}$. Verificați relația $C^2-Tr(C)\cdot C+\det(C)\cdot I_2=O_2$.

**I6.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\2&1&2\end{pmatrix}$. Verificați relația $\det(A^2)=(\det(A))^2$.

**I7.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Demonstrați că $\det(A+A^2+A^3)=0$.

**I8.** Determinați $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\begin{vmatrix}3x&4\\x&2\end{vmatrix}=4$.

**I9.** Determinați $x\in\mathbb{R}$, astfel încât $\begin{vmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&2\end{vmatrix}=12$.

**I10.** Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&-1&-1\\3&2&0\end{pmatrix}$. Demonstrați egalitatea $\det(A)=\det(B)$.

### 2.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}2&-2\\1&-1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $\det(I_2+A+A^2+A^3)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** Calculați următorul determinant $D=\begin{vmatrix}1+\sqrt{2}&1-\sqrt{3}\\1+\sqrt{3}&1-\sqrt{2}\end{vmatrix}$.

**C3.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\end{pmatrix}$. Calculați $\det(AB)$.

**C4.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați valoarea numărului real $x$ care verifică relația $\det(A-xI_2)=0$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C5.** Fie $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 2\\ a & b & c\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Demonstrați că $\det(A)=0$, pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.

**C6.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1+2a & 2a\\ -2a & 1-2a\end{pmatrix}$. Demonstrați că $\det(A)$ nu depinde de valoarea numărului real $a$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C7.** Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $Y=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că $\det(X\cdot Y)=(ad-bc)^2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C9.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\begin{vmatrix}x+1 & 2\\ 3 & x-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-1 & 3\\ -1 & x+2\end{vmatrix}$.

**C10.** Demonstrați egalitatea $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & a & a^2\\ 1 & 2a & 4a^2\end{vmatrix}=2a(a-1)(a-2)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C11.** Rezolvați ecuația $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & x^2 & 2x+6\end{vmatrix}=0$, unde $x\in\mathbb{R}$.

**C12.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-4x+3=0$. Demonstrați egalitatea $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & -4\\ x_2 & x_1 & -4\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=0$.

**C13.** Demonstrați egalitatea $\begin{vmatrix}\lg 4 & 4\\ \lg 2 & 2\end{vmatrix}=0$.

**C14.** Demonstrați că determinantul $\begin{vmatrix}1+\sqrt{20} & 2\\ 3+\sqrt{5} & 1\end{vmatrix}$ este număr întreg.





**C15.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{vmatrix}x+4 & x+3\\ x+2 & x+1\end{vmatrix}$. Demonstrați că $f(a)=f(b)$, pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.

**C16*.** Fie numerele reale nenule $a, b, c, m, n, p$ și matricele $A=\begin{pmatrix}a & b\\ m & n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & c\\ m & p\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}b & c\\ n & p\end{pmatrix}$. Demonstrați că, dacă $\det(A)=\det(B)=0$, atunci $\det(C)=0$.

**C17*.** Fie $m\in\mathbb{R}$ și $x_1$, respectiv $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-(m+1)x+m=0$. Demonstrați că $\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -x_2 & x_1\end{vmatrix}\geq 1$.

**C18*.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-4mx+4m^2=0$, unde $m\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ x_2 & x_1 & 1\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=0$, oricare ar fi $m$.

**C19*.** Fie matricea $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$. Demonstrați că, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, are loc relația: $\det(I_2+xC)+\det(I_2-xC)=2$.

**C20*.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix}x & -1\\ 7 & x+4\end{pmatrix}$. Demonstrați că, $\det(A)\geq 3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

### 2.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Demonstrați egalitatea $\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}$.

**2.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}$ și $B=3A$. Demonstrați că $\det(B)=9\det(A)$.

**3.** Pentru matricea $C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, demonstrați că $C^2-7C=-\det(C)I_2$.

**4.** Determinați $a\in\mathbb{R}$, pentru care matricea $D=\begin{pmatrix}a & 3\\ 12 & 4\end{pmatrix}$ verifică relația $\det(D)\neq 0$.

**5.** Demonstrați inegalitatea $\begin{vmatrix}-1 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}<\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}$.

**6.** Determinați numărul real $x$ soluție a ecuației $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2014$.

### Testul 2*

**1.** Se consideră determinantul $D = \begin{vmatrix} \sin 15^\circ & \cos 15^\circ \\ -\cos 15^\circ & \sin 15^\circ \end{vmatrix}$. Demonstrați că $D \in \mathbb{N}$.

**2.** Demonstrați inegalitatea $\begin{vmatrix} a+1 & -2 \\ 2 & a-1 \end{vmatrix} > 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

**3.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = A^{123}$. Calculați determinantul matricei $B$.

**4.** Determinați valoarea minimă a determinantului $D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**5.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați numerele reale $m$, $n$, $p$ pentru care are loc egalitatea $\det(A + xB) = m + nx + px^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**6.** Determinați $x \in \mathbb{C}$ pentru care $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

## 3. Aplicații ale determinanților în geometrie

### 3.1. Noțiuni teoretice

Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C)$. Acestor puncte le asociem un determinant $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

• Dacă $\Delta = 0$, atunci punctele sunt coliniare.





• Dacă $\Delta \neq 0$, atunci cele trei puncte determină un triunghi ce are aria $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\Delta|$.

Fie punctele $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Atunci ecuația dreptei $AB$ este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.

### 3.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că triunghiul determinat de punctele $A(1, 0)$, $B(0, 4)$ și $O(0, 0)$ are aria egală cu 1.

**I2.** Demonstrați că punctele $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ și $C(3, 3)$ sunt coliniare.

**I3.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $C(0, 1)$ și $D(1, 0)$.

**I4.** Demonstrați că punctele $A(1, 3)$, $B(2, 5)$ și $C(3, 6)$ nu sunt coliniare.

**I5.** Fie punctele $A(1, 2)$ și $B(2, 1)$. Fie $M$ mijlocul segmentului $AB$ și $O$ originea. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $M$ și $O$.

**I6.** Considerăm punctele $O(0, 0)$, $M(1, 3)$, $N(2, 4)$ și $P(4, 6)$. Demonstrați egalitatea $\mathcal{A}_{ONP} = 2\mathcal{A}_{OMN}$.

**I7.** Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care punctele $A(1, 2)$, $B(2, 3)$ și $C(3, a)$ sunt coliniare.

**I8.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm punctele $A_n(2, n)$. Dacă $O(0, 0)$ reprezintă originea sistemului de axe, demonstrați că triunghiurile $OA_1A_2$ și $OA_3A_4$ au arii egale.

**I9.** Demonstrați că punctele $A(1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$ și $D(-1, 3)$ sunt toate coliniare.

**I10.** Demonstrați că triunghiul format de punctele $A(2, 3)$, $B(4, 3)$ și $C(a, 5)$ are aria egală cu 2, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

### 3.3. Probleme de consolidare

**C1.** În-un sistem de axe $xOy$, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ și $C(3, 7)$. Calculați aria triunghiului $ABC$.

**C2.** Se consideră punctele $A(-2, 4)$, $B(6, -6)$ și $C(8, 2)$. Dacă $M$ este mijlocul segmentului $BC$, arătați că ariile triunghiurilor $ABM$ și $ACM$ sunt egale.

**C3.** Se consideră punctele $A(2, 5)$ și $B(-3, -5)$. Determinați ecuația dreptei $AB$.

*(Variante Bac, 2001)*

**C4.** Fie punctele $A(-2, 4)$, $B(6, -6)$ și $C(8, 2)$. Dacă $M$ este mijlocul segmentului $BC$, determinați ecuația dreptei $AM$.

**C5.** Demonstrați că punctele $A(1, 3)$, $B(-4, -2)$ și $C(3, 5)$ sunt coliniare.

**C6.** Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(4, 5)$ și $C(m, m-3)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Demonstrați că aria triunghiului $ABC$ nu depinde de $m$.

**C7.** Se consideră punctele $A_n(n, 2^n)$, unde $n \in \mathbb{N}$. Calculați aria triunghiului $A_1A_2A_3$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Se consideră punctele $A_n(n+2, 3n-2)$. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, punctul $A_n$ aparține dreptei $A_1A_2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C9.** Determinați valoarea numărului real $a$, știind că punctele $A(1, 1)$, $B(2, a)$ și $C(a, 5)$ sunt coliniare.

*(Variante Bac, 2007)*

**C10.** Se consideră punctele $C_n(n, n^2)$. Demonstrați că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, $p > 2$, punctele $C_1$, $C_2$ și $C_p$ nu pot fi coliniare.

**C11.** Determinați valoarea numărului real $x$ dacă punctele $A(3, 5)$, $B(5, 3)$ și $C(x, x)$ sunt coliniare.

**C12.** Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 4)$, $C(-2, -2)$ și $D(3, -1)$. Determinați aria patrulaterului $ABCD$.

**C13.** Se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(-m+1, m-1)$ și $B(2m-3, -2m+3)$. Demonstrați că punctul $O$ aparține dreptei $AB$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

**C14.** Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(3, 4)$, $C(-2, -1)$ și $D(-4, -3)$. Demonstrați că toate cele patru puncte sunt coliniare.

**C15.** Se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(m+1, m+2)$ și $B(m-1, m)$. Arătați că aria triunghiului $OAB$ nu depinde de valoarea numărului real $m$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C16*.** Se consideră punctele $B_n(n+1, 2n)$, unde $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că, oricare ar fi $p, q, r \in \mathbb{N}$ distincte, punctele $B_p$, $B_q$ și $B_r$ sunt coliniare.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17*.** Fie punctele $A(2, 1)$, $B(6, 3)$ și $C(a, 7)$. Determinați valoarea numărului real $a$, pentru care aria triunghiului $ABC$ este egală cu 6.

**C18*.** Demonstrați că punctele $A(x, 2x)$, $B(x-1, 2x-2)$ și $C(3, 3)$ nu pot fi coliniare, pentru orice număr real $x$.

**C19*.** Se consideră punctele $A(3, 1)$, $B(5, 1)$ și $C(m, m^2-4m+7)$. Determinați valoarea numărului real $m$, pentru care aria triunghiului $ABC$ are valoarea minimă.

**C20*.** Se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(4, 2)$ și $C(x, -x^2+4x+2)$, unde $x \in \mathbb{R}$. Definim funcția $f: [0, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathcal{A}_{ABC}$. Determinați valoarea maximă a funcției $f$.





## 3.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Studiați dacă punctele $A(2, 3)$, $B(1, 4)$ și $C(0, 5)$ sunt coliniare.

**2.** Demonstrați că triunghiul determinat de punctele $D(1, 1)$, $E(7, 3)$ și $F(3, 7)$ are aria reprezentată de un număr natural.

**3.** Determinați ecuația dreptei care trece prin originea axelor și centrul de greutate al triunghiului format de punctele $M(2, 1)$, $N(4, 5)$ și $P(9, 0)$.

**4.** Se consideră punctele $O(0, 0)$, $W(6, 0)$, $V(0, 3)$ și $U(-1, -1)$. Ordonați crescător ariile triunghiurilor $OWU$, $OWV$ și $OUV$.

**5.** Considerăm punctele $A(2, 6)$, $B(6, 4)$ și $C(0, 8)$. Fie $M$ mijlocul laturii $AB$. Determinați numărul real $x$ care verifică egalitatea $\mathcal{A}_{ABC} = x \cdot \mathcal{A}_{AMC}$.

**6.** Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(5, 5)$, $C(2, 4)$ și $D(4, 2)$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor $AB$ și $CD$.

### Testul 2*

**1.** Demonstrați că punctele $R(2, 0)$, $S(0, 2)$ și $T(x, y)$ sunt coliniare pentru orice numere reale $x$ și $y$ cu proprietatea $x+y=2$.

**2.** Determinați $m \in \mathbb{Z}$, pentru care triunghiul format de punctele $A(1, m)$, $B(m, 1)$ și $C(0, 1)$ are aria egală cu 3.

**3.** Se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(5, 7)$ și $C(a, 4)$. Determinați valoarea numărului real $a$, pentru care $\mathcal{A}_{OAC} = \mathcal{A}_{OAB}$.

**4.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim punctele $A_n(n, n^2)$. Demonstrați că dreapta formată de punctele $A_2$ și $A_4$ nu trece prin originea axelor.

**5.** Considerăm punctele $A(2, -1)$, $B(4, -3)$ și $C(0, 1)$. Notăm cu $D$, $E$ și $F$ simetricele lor față de punctul $O(0, 0)$. Demonstrați că $D$, $E$, $F$ sunt coliniare.

**6.** Fie punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 4)$. Determinați un punct $M$ de pe dreapta de ecuație $x+y=0$, pentru care $\mathcal{A}_{ABM} = 5$.

# 4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale

## 4.1. Noțiuni teoretice

### 4.1.1. Matrice inversabile

**Definiție:** O matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ este inversabilă dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ astfel încât $AB = BA = I_n$.

**Notație:** Matricea $B$ din definiție se numește inversa matricei $A$ și se notează $A^{-1}$.

**Teoremă:** O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$.

**Observații:** Teorema este valabilă și pentru matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, dar și $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, atunci $\det(A) = \pm 1$.

### 4.1.2. Algoritm general de calcul al inversei

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$. Pentru orice element $a_{ij}$, se notează cu $d_{ij}$ determinantul obținut prin eliminarea liniei $i$ și coloanei $j$, adică linia și coloana corespunzătoare acestui element:

- se calculează $d = \det(A) \neq 0$;
- se construiește matricea **adjunctă** $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, unde $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$;
- se obține $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$.

## 4.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că matricea $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ este inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**I2.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea $B = \frac{1}{6} A^2$ este inversa matricei $A$.





**I3.** Demonstrați că matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

**I4.** Demonstrați că matricea $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$.

**I5.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $A^{-1}$.

**I6.** Determinați valoarea numărului real $a$, știind că matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ este inversa matricei $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**I7.** Determinați toate valorile reale ale numărului $x$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & x \end{pmatrix}$ este inversabilă.

**I8.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea $AB$ nu este inversabilă.

**I9.** Demonstrați că matricea $D = \begin{pmatrix} x+2 & 4 \\ -3 & x-2 \end{pmatrix}$ este inversabilă, oricare ar fi numărul real $x$.

**I10.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AX = B$.

## 4.3. Probleme de consolidare

**C1.** Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2$ este inversa matricei $A$.

**C2.** Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea $B = A - 4I_2$ este inversa matricei $A$.

**C3.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$. Demonstrați că matricea $B$ este inversabilă și $B^{-1} = I_3 - \frac{1}{11} A$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C4.** Fie matricea $X(a) = I_2 + aA$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $a \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{5}\right\}$, demonstrați că matricea $X\left(-\frac{a}{1+5a}\right)$ este inversa matricei $X(a)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C5.** Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea $B$ nu este inversabilă, dar matricea $I_3 + B$ este inversabilă.

**C6.** Demonstrați că matricea $B = \begin{pmatrix} 1-2b & 4b \\ -b & 1+2b \end{pmatrix}$ este inversabilă, pentru orice $b \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C7.** Determinați inversa matricei $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

**C8.** Se consideră matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determinați $B^{-1}$.

**C9.** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$. Determinați valorile reale ale numerelor $x$ și $y$, știind că $B = A^{-1}$.

**C10.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determinați numărul real $m$ astfel încât $A^{-1} = A - mI_2$.

**C11.** Fie matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea lui $a$ pentru care $A(a)$ este inversabilă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12.** Rezolvați ecuația matriceală $AX = I_2$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

**C13.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $AXB = C$.

**C14.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Rezolvați ecuația matriceală $XA = B$.





**C15.** Determinați valoarea numărului real $x$ care verifică egalitatea $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}^2 = I_2$.

**C16*.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică ecuația $A(X + B) = C$.

**C17*.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $B = A \cdot {}^tA$, unde ${}^tA$ reprezintă transpusa matricei $A$. Arătați că, dacă suma elementelor matricei $B$ este nulă, atunci matricea $A$ nu este inversabilă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18*.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculați $A^2$ și demonstrați că ecuația $X^2 = O_2$ admite o infinitate de soluții $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C19*.** Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $b \neq c$. Demonstrați că matricea $B = A - {}^tA$ este inversabilă, unde ${}^tA$ reprezintă transpusa matricei $A$.

**C20*.** Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ două matrice inversabile. Demonstrați că matricea $C = AB$ este inversabilă și $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

### 4.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Demonstrați că matricea $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

**2.** Fie matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că matricea $X(-2)$ este inversa matricei $X(2)$.

**3.** Determinați toate valorile reale ale numărului $x$ pentru care matricea $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

**4.** Fie $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați egalitatea $D+D^{-1}=2I_2$.

**5.** Determinați inversa matricei $F=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

**6.** Fie matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B=I_2+aA$. Demonstrați că $B$ este inversabilă, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

### Testul 2*

**1.** Determinați toate valorile numărului real $x$ pentru care matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este inversabilă.

**2.** Fie matricea $X(a)=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Demonstrați că matricea $X(b)$ este inversa matricei $X(a)$ dacă și numai dacă $a+b=0$.

**3.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^{-1}\notin\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

**4.** Notăm cu $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2-6mx+9m^2=0$, unde $m\in\mathbb{R}^*$. Demonstrați că matricea $A=\begin{pmatrix} x_1 & 3 & x_2 \\ 2 & 1 & 4 \\ x_2 & 3 & x_1 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă, oricare ar fi $m$.

**5.** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $AXA=I_2$, unde $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

**6.** Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că matricea $B=aI_2+A$ este inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0,-3\}$.





# 5. Sisteme de ecuații liniare

## 5.1. Noțiuni teoretice

### 5.1.1. Terminologie

**Forma generală:** $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ – sistem de $m$ ecuații cu $n$ necunoscute.

Coeficienți: $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$;

Termeni liberi: $b_1, b_2, \ldots, b_m$;

Necunoscute: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Matricea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se numește **matricea sistemului**.

**Clasificarea sistemelor:**

- sistem incompatibil – care nu are soluție;
- sistem compatibil determinat – care are soluție unică;
- sistem compatibil nedeterminat – care are o infinitate de soluții.

### 5.1.2. Metoda Cramer

Condiții de aplicare:

- numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute;
- matricea sistemului are determinantul nenul.

Se consideră determinanții:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}.$$

Atunci: $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, …, $x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$, deci se obține un sistem compatibil determinat.

### 5.1.3. Metoda eliminării Gauss

Condiții de aplicare:

- se aplică oricărui tip de sistem;
- este o generalizare a metodei reducerii cunoscute din clasele gimnaziale.

Idee generală:
• se combină prima ecuație succesiv cu următoarele și se elimină astfel prima necunoscută;
• sistemul astfel obținut are cu o ecuație și o necunoscută mai puțin;
• se reia din nou procesul de reducere pentru următoarea necunoscută etc.
Finalizare:
• dacă obținem la final o singură ecuație cu o singură necunoscută a cărei valoare o putem determina, atunci sistemul este compatibil determinat și celelalte necunoscute se determină parcurgând drumul invers;
• dacă obținem la final o singură ecuație cu mai multe necunoscute, atunci sistemul este compatibil nedeterminat și aflăm una dintre necunoscute în funcție de celelalte, iar apoi se efectuează calcule pentru determinarea celorlalte necunoscute;
• dacă se obțin la final două ecuații care nu pot fi adevărate simultan, atunci sistemul este incompatibil.

### 5.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} x+2y=7 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$ admite soluția $x=1$ și $y=3$.

**I2.** Demonstrați că tripletul $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$.

**I3.** Determinați soluția sistemului $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, folosind metoda reducerii.

**I4.** Folosind metoda Cramer, determinați soluția sistemului $\begin{cases} 3x+2y=13 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$.

**I5.** Fie sistemul $\begin{cases} x+ay=3 \\ 2x-y=b \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați pe $a$ și $b$, știind că sistemul admite ca soluție perechea $(1, 2)$.

**I6.** Considerăm sistemul $\begin{cases} x+ay=1+a \\ 2x+y=3 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Demonstrați că sistemul admite o soluție formată din două numere egale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**I7.** Folosind metoda Cramer, determinați soluția sistemului $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-y+z=2 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$.

**I8.** Considerăm sistemul $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+3y+2z=6 \end{cases}$. Determinați soluția sistemului care verifică condiția $x=y$.





**I9.** Folosind metoda reducerii Gauss, rezolvați sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=5 \\ x+2y+3z=6 \end{cases}$.

**I10.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=9 \end{cases}$ este incompatibil.

### 5.3. Probleme de consolidare

**C1.** Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x+2y=11 \end{cases}$.

**C2.** Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} x+y\sqrt{3}=4 \\ 2x-y\sqrt{3}=-1 \end{cases}$.

**C3.** Rezolvați în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ 3x-y-2z=0 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$.

**C4.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x-y+z-t=0 \\ x+y-z+t=2 \end{cases}$. Demonstrați că sistemul admite soluția (1, 0, 0, 1).

**C5.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$. Determinați numerele reale $\alpha$, $\beta$, știind că sistemul admite soluția $(\alpha, 1, \beta)$.

**C6.** Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+y+z=m^2-3 \\ 5x-2y+z=-2 \\ (m+1)x+2y+3z=-2 \end{cases}$. Determinați valoarea numărului real $m$, pentru care sistemul admite soluția $(1, 2, -3)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C7.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} 2x-3y+mz=2m+1 \\ x-2y+3z=6 \\ mx+y-(m+1)z=-1 \end{cases}$ admite soluția (2, 1, 2), oricare ar fi valoarea numărului real $m$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C8.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x-3y+2z=3 \\ ax+2y-z=5 \\ 3x+(a+1)y+2z=9 \end{cases}$, unde $a$ este un parametru real. Demonstrați că tripletul $(7, 2, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C9.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x-y+3z=2m-1 \\ -x+3y+2z=4m-5 \\ 3x+2y-z=-6m+10 \end{cases}$, unde $m$ este un parametru real. Demonstrați că soluția sistemului verifică relația $x+y+z=1$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

**C10.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \\ x-y+2z=a \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea parametrului $a$, astfel încât soluția sistemului să verifice relația $x=y+z$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C11.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y=a+2 \\ x+z=2a+1 \\ y+z=a+3 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{Z}$. Demonstrați că soluțiile sistemului sunt numere întregi.

**C12.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ ax-y+(a+1)z=5 \\ 2x+2y+4z=7 \end{cases}$ este incompatibil, oricare ar fi valoarea parametrului real $a$.

**C13.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+3y+2z=b \\ x-2y+az=-5 \\ x+y+4z=4 \end{cases}$, unde parametrii $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului $b$, știind că sistemul admite o soluție $(x_0, y_0, z_0)$ cu proprietatea $x_0+y_0+z_0=4$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** 1 kg de mere, 1 kg de caise și 1 kg de nectarine costă în total 6 lei. 2 kg de mere, 3 kg de caise și 4 kg de nectarine costă în total 20 lei. Dacă prețul unui kilogram de nectarine este cu 1 leu mai mare decât prețul unui kilogram de caise, determinați prețul unui kilogram din fiecare dintre cele trei fructe.

**C15.** Perimetrul triunghiului $ABC$ este egal cu 13, iar suma lungimilor laturilor $AB$ și $AC$ este egală cu 8. Dacă lungimea laturii $BC$ este cu 1 mai mare decât lungimea laturii $AC$, demonstrați că triunghiul $ABC$ este isoscel.





**C16*.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay+a^2z=a \\ x+by+b^2z=b \\ x+cy+c^2z=c \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ distincte. Demonstrați că soluția sistemului nu depinde de numerele $a, b, c$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17*.** Determinați toate soluțiile naturale ale sistemului $\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$.

**C18*.** Determinați toate valorile numărului întreg $a$, pentru care soluțiile sistemului $\begin{cases} x+y-z=a-1 \\ 2x-2y+z=1 \\ 2x+4y+3z=3a+3 \end{cases}$ sunt numere întregi.

**C19*.** Determinați valorile parametrului real $m$ pentru care sistemul $\begin{cases} x-2y+3z=-3 \\ 2x+y+z=4 \\ mx-y+4z=1 \end{cases}$ admite soluție unică.

*(Variante Bac, 2009)*

**C20*.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+ay=1 \\ y+az=a \\ x+z=1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Arătați că soluția sistemului este formată din trei numere aflate în progresie geometrică.

*(Variante Bac, 2009)*

### 5.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Dacă $x$ și $y$ sunt soluții ale sistemului $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$, demonstrați că $5x+3y=11$.

**2.** Dacă notăm cu $(x, y)$ soluția sistemului $\begin{cases} 2x+4y=26 \\ 4x-3y=-3 \end{cases}$, demonstrați că numerele $1$, $x$ și $y$ pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**3.** Determinați soluția sistemului $\begin{cases} x+y+3z=12 \\ 2x-z=-1 \\ y+z=5 \end{cases}$.

**4.** Considerăm sistemul $\begin{cases} ax-y=a-1 \\ x+ay=a+1 \end{cases}$. Demonstrați că soluția sistemului nu depinde de valoarea numărului real $a$.

**5.** Considerăm sistemul $\begin{cases} x+2y=a+2 \\ 2x+y=2a+1 \end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului $a$, dacă soluția sistemului verifică condiția $x=2y$.

**6.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=7 \end{cases}$ admite o soluție formată din trei numere întregi.

## Testul 2*

**1.** Determinați soluția sistemului $\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x+2y+z=5 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$.

**2.** Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x+y+2z=11 \\ 4x-y-z=-1 \end{cases}$. Determinați soluția sistemului cu proprietatea că numerele $x$, $y$ și $z$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**3.** Determinați valoarea parametrului real $m$, pentru care soluția sistemului $\begin{cases} x+y+z=m+2 \\ x+y-z=m \\ x-y+z=m \end{cases}$ verifică condiția $x^2+y^2+z^2=38$.

**4.** Demonstrați că sistemul $\begin{cases} ax+y+z=3 \\ x+ay+z=4 \\ x+y+z=5 \end{cases}$ este compatibil determinat, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

**5.** Un caiet, o carte și un pix costă 8 lei. Două caiete, două cărți și trei pixuri costă 17 lei. Trei caiete, o carte și patru pixuri costă 15 lei. Cât costă patru caiete, două cărți și un pix în total?

**6.** Considerăm sistemul $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+ay+z=4 \\ x+y+az=2 \end{cases}$. Determinați toate valorile reale ale numărului $a$, pentru care acest sistem este incompatibil.





# 6. Probleme de sinteză – algebră

**1.** Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \middle| a\in(0,\infty),\ b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Arătați că $I_1\in G$.
b) Arătați că, dacă $A, B\in G$, atunci $AB\in G$.
c) Dați un exemplu de matrice $S, T\in G$, pentru care $ST\neq TS$.

*(Variante Bac, 2007)*

**2.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X)=AX-XA$.

a) Calculați $f(I_2)$ și $f(O_2)$.
b) Arătați că $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$, $\forall X, Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
c) Arătați că $f$ nu este nici injectivă și nici surjectivă.

*(Variante Bac, 2007)*

**3.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Determinați cel mai mic număr natural nenul $n$, pentru care $A^n=I_2$.
b) Calculați $I_2+A+A^2+\ldots+A^5$.
c) Demonstrați că $I_2+A+A^2+\ldots+A^{2015}=O_2$.

*(Variante Bac, 2005, enunț modificat)*

**4.** Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $A^2$.
b) Determinați numerele reale $x$ și $y$, astfel încât $A^2+xA+yI_2=O_2$.
c) Demonstrați că $A^{2014}-5A^{2013}-2A^{2012}=O_2$.

**5.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Pentru orice $a\in\mathbb{R}$, considerăm matricea $X(a)=I_2+aA$.

a) Demonstrați că $X(a)X(b)=X(a+b+5ab)$, pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.
b) Determinați $c\in\mathbb{R}$, astfel încât $X(a)X(c)=X(c)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.
c) Determinați $t\in\mathbb{R}$, astfel încât $X\left(\frac{14}{5}\right)X\left(\frac{9}{5}\right)\ldots X\left(-\frac{6}{5}\right)X\left(-\frac{11}{5}\right)=X(t)$.

**6.** Se consideră determinanții: $A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{3} & \sqrt[3]{5} \\ \sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{9} & \sqrt[3]{25} \end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^x & 3^x & 7^x \\ 4^x & 9^x & 49^x \end{vmatrix}$.

a) Demonstrați că $A=(a-b)(b-c)(c-a)$.

b) Demonstrați că $B > 0$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $C = 0$.

*(Variante Bac, 2003)*

**7.** Se consideră determinanții: $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2008 & 2009 & -2010 \\ -2010 & 2008 & 2009 \\ 2009 & -2010 & 2008 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} 2^x & 3^x & 5^x \\ 5^x & 2^x & 3^x \\ 3^x & 5^x & 2^x \end{vmatrix}$.

a) Demonstrați că $2A = (a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$.

b) Demonstrați că $B > 0$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $C = 0$.

**8.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$. Atunci:

a) Demonstrați că $A^2 - A - I_2 = O_2$.

b) Folosind eventual punctul de mai sus, demonstrați că există o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $AB = I_2$.

c) Demonstrați că matricea $B$ determinată la punctul b) verifică proprietatea $\det(B) = \det(A)$.

**9.** Se consideră matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Demonstrați că $\det(A^2) = (\det(A))^2$, pentru orice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Demonstrați că nu există nicio matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care să verifice proprietatea $X^2 = C$.

**10.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2008 & 2009 \\ -2008 & -2009 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2008 & -2008 \\ 2009 & -2009 \end{pmatrix}$ din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det(A) + 2\det(B)$.

b) Demonstrați că $\det(C + I_2) + \det(C - I_2) = 2$.

c) Calculați $\det(C+D) + \det(C-D)$.

**11.** Se consideră mulțimea $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \{1, 2, 3, 4\}, \text{ distincte} \right\}$.

a) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\Gamma$.

b) Determinați valoarea maximă și, respectiv, minimă a determinantului matricelor din $\Gamma$.

c) Determinați toate matricele din $\Gamma$ care au determinant impar.

**12.** Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, notăm cu ${}^tA$ matricea transpusă.

a) Demonstrați că $\det(A) = \det({}^tA)$, pentru orice matrice $A$.

b) Demonstrați că $\det(A \cdot {}^tA) \geq 0$, pentru orice matrice $A$.

c) Demonstrați că, dacă $\mathrm{Tr}(A \cdot {}^tA) = 0$, atunci $A = O_2$.





**13.** Considerăm două matrice oarecare $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Demonstrați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det A + 2\det B$.

b) Dacă $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$, atunci $\det B = 0$.

c) Dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ și $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$, arătați că $\det(A+B) + \det(A-B) = 0$.

**14.** Se consideră toate punctele $A_n(n-1, 2n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $O(0, 0)$.

a) Determinați ecuația dreptei $A_1A_2$.

b) Determinați aria triunghiului $OA_1A_2$.

c) Demonstrați că $A_n$ aparține dreptei $A_1A_2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

*(Variante Bac, 2009)*

**15.** Într-un sistem de axe $xOy$, considerăm punctele $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ și $C(4, 9)$. Fie $M$, $N$ mijloacele laturilor $AB$, respectiv $AC$.

a) Determinați aria triunghiului $ABC$.

b) Determinați ecuația dreptei $MN$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi punctul $P \in MN$, aria triunghiului $PBC$ este egală cu jumătate din aria triunghiului $ABC$.

**16.** Se consideră numărul real $a$ și sistemul $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$.

a) Rezolvați acest sistem pentru cazul $a = 2$.

b) Demonstrați că, oricare ar fi $a \neq 1$, sistemul este compatibil determinat.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $a \neq 1$, soluțiile sistemului nu depind de numărul $a$.

*(Variante Bac, 2007)*

**17.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay + bz = 3 \\ x + by + az = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$. Notăm cu $A$ matricea sistemului.

a) Demonstrați că $\det(A) = (a-b)(a+b-2)$.

b) Demonstrați că, dacă $a \neq b$, atunci sistemul este compatibil determinat.

c) Demonstrați că, dacă $a \neq b$, atunci $y = z$.

**18.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2y + z = 0 \\ 2x - 2y + ax = 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Notăm cu $A$ matricea sistemului.

a) Demonstrați că $\det(A) \leq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinați valorile lui $a$, pentru care matricea $A$ este inversabilă.

c) Rezolvați sistemul în cazul $a \neq 0$.

*(Variante Bac, 2009)*

**19.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+2y+z+2t=5 \\ 2x-3y+2z-t=3 \\ -x+y+3z-2t=2 \end{cases}$.

a) Demonstrați că (2, 1, 1, 0) este soluție a sistemului.

b) Demonstrați că $3y+4z=7$.

c) Determinați soluția sistemului care verifică condiția $y=z$.

**20.** Se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$ și dreapta $d$ de ecuație $d: x-y-4=0$.

a) Determinați ecuația dreptei $A_1A_3$.

b) Demonstrați că punctele $A_1$, $A_2$ și $A_3$ nu sunt coliniare.

c) Demonstrați că $A_n \notin d$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$.

# 7. Limite de funcții. Asimptote

## 7.1. Noțiuni teoretice

### 7.1.1. Noțiuni introductive

Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. O **vecinătate a lui** $x_0$ este un interval deschis care conține pe $x_0$.

**Dreapta reală încheiată:** $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$. O vecinătate a lui $+\infty$ este orice interval de forma $(a, \infty]$, iar o vecinătate a lui $-\infty$ este orice interval de forma $[-\infty, a)$.

Operațiile din $\overline{\mathbb{R}}$ completează operațiile din $\mathbb{R}$ cu operații speciale cum ar fi:

- adunări: $a+\infty=\infty$, $a-\infty=-\infty$, $\infty+\infty=\infty$, $-\infty-\infty=-\infty$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$;
- înmulțiri: $a \cdot \infty = \infty$, dacă $a>0$; $a \cdot \infty = -\infty$, dacă $a<0$, $\infty \cdot \infty = \infty$; $-\infty \cdot \infty = -\infty$; $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$;
- împărțiri: $\frac{a}{\pm\infty}=0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$; $\frac{\infty}{a}=\infty$, oricare $a>0$;
- ridicare la putere: $a^{\infty}=\infty$, oricare ar fi $a>1$; $a^{\infty}=0$, oricare ar fi $a \in (0, 1)$, $\infty^{\infty}=\infty$, $\infty^{-\infty}=0$;

Cazuri de nedeterminare: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty-\infty, \infty^0, 0^0, 1^{\infty}$.

Spunem că $\alpha$ este **punct de acumulare** al mulțimii $A$ dacă pentru orice $V$, vecinătate a lui $\alpha$, avem $A \cap V \setminus \{\alpha\} \neq \emptyset$.

**Exemplu:** Mulțimea punctelor de acumulare ale intervalului $(a, b)$ este reprezentată de intervalul $[a, b]$.





### 7.1.2. Limite de funcții

Se consideră o funcție $f: D \to \mathbb{R}$ și $\alpha$ un punct de acumulare al mulțimii $D$.

**Definiție:** Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ reprezintă **limita** funcției $f$ în $\alpha$ dacă pentru orice vecinătate $V$ a lui $l$ există o vecinătate $U$ a lui $\alpha$ astfel încât, oricare ar fi $x \in D \cap U$, avem $f(x) \in V$. Notăm $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.

**Limite laterale:** • limita la stânga $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x<\alpha}} f(x) \overset{not}{=} \lim\limits_{x \nearrow \alpha} f(x)$;

• limita la dreapta $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x>\alpha}} f(x) \overset{not}{=} \lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x)$.

**Teoremă:** Limita funcției în punctul $\alpha$ există dacă și numai dacă limitele laterale există și sunt egale.

**Operații cu limite de funcții:** Exceptând cazurile de nedeterminare, sunt adevărate următoarele relații:

- $\lim\limits_{x \to \alpha}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \pm \lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$;
- $\lim\limits_{x \to \alpha} cf(x) = c \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to \alpha}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$;
- $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)\right)}$.

**Teoremă:** Fie $f: D \to \mathbb{R}$ o funcție elementară (ex. polinomiale, exponențiale, logaritmice, putere, trigonometrice). Atunci, pentru orice $\alpha \in D$ avem $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

| Limite fundamentale | Transformare |
|---|---|
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ | $\lim\limits_{u(x) \to 0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ | $\lim\limits_{u(x) \to 0} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1$ |
| $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ | $\lim\limits_{u(x) \to 0} \frac{a^{u(x)} - 1}{u(x)} = \ln a$ |

### 7.1.3. Asimptote

Fie funcția $f: D \to \mathbb{R}$.

Dreapta verticală de ecuație $x=\alpha$ se numește **asimptotă verticală**, dacă cel puțin una dintre limitele $\lim\limits_{x \searrow \alpha} f(x)$ și $\lim\limits_{x \nearrow \alpha} f(x)$ este infinită.

Dreapta orizontală de ecuație $y=y_0$ se numește **asimptotă orizontală la** $+\infty$, dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$.

Dreapta orizontală de ecuație $y=y_0$ se numește **asimptotă orizontală la** $-\infty$, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$.

Dreapta oblică de ecuație $y=mx+n$, $m\neq 0$ se numește **asimptotă oblică la** $+\infty$, dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$.

• **Etape de calcul:** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\neq 0$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=n$.

Analog se studiază la $-\infty$.

### 7.2. Probleme de inițiere

**I1.** Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{5x-15}$.

**I2.** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+2}$.

**I3.** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+2}-x\right)$.

**I4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\leq 1\\ 4x+1, & x>1\end{cases}$. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

**I5.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x<2\\ x+5, & x\geq 2\end{cases}$. Demonstrați că nu există $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

**I6.** Demonstrați că dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală pentru graficul funcției $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$.

**I7.** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=2$ este asimptotă orizontală la $+\infty$ pentru graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+3}$.

**I8.** Determinați valoarea numărului real $a$, cu proprietatea $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax+3}{2x+5}=4$.

**I9.** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică la $+\infty$ la graficul funcției $f:(2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$.

**I10.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. Determinați ecuația asimptotei oblice la $+\infty$, la graficul funcției $f$.

### 7.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<3\\ 4x-7, & x\geq 3\end{cases}$. Demonstrați că există $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.





**C2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax+2, & x<0\\ x^2-x+2, & x\geq 0\end{cases}$. Demonstrați că există $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

**C3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}, & x<1\\ ax+3, & x\geq 1\end{cases}$. Demonstrați că nu există $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, oricare ar fi valoarea numărului real $a$.

**C4.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2ax, & x<1\\ 3x^2-a^2x, & x\geq 1\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați $a$ astfel încât funcția $f$ să aibă limită în $x=1$.

**C5.** Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+5}{-4x^2+5x-9}$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^6+2x^4+1}{2x^3+4x-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2+3x+2}}$.

**C6.** Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x-3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{x+7}}{4x-8}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$.

**C7.** Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$. Determinați valoarea numărului real $a$, pentru care $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=2014$.

**C8.** Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+x}{x+3}-2x\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x}{x-1}-\dfrac{x^2-2x}{x+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln x\right)$.

**C9.** Determinați asimptota verticală a funcției $f:(4,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{2x-8}$.

**C10.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-x-3}{3x^2+2x+1}$ admite asimptotă orizontală la $-\infty$.

**C11.** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x^2+x+1}{x-2}$.

**C12.** Determinați asimptotele verticale ale funcției $f:\mathbb{R}-\{2,4\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-6x+8}$.

**C13.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+3^x$. Determinați asimptotele acestei funcții.

**C14.** Demonstrați că funcțiile $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ și $g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ admit aceeași asimptotă oblică la $+\infty$.

**C15.** Determinați ecuația asimptotei la $-\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1+e^x$.

**C16*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x+a, x\le 1\\ x^2+2x+b\ln(x^2-1), x>1\end{cases}$. Determinați $a, b\in\mathbb{R}$, astfel încât funcția $f$ să aibă limită în $x=1$.

**C17*.** Determinați valoarea numărului real $m$, pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2-3x+5}{(2m+1)x^2-4x+7}=\dfrac{2}{5}$.

**C18*.** Determinați valoarea numărului real $a$, știind că funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^2+ax+1}{x-2}$ admite ca asimptotă oblică la $+\infty$ dreapta de ecuație $y=2x+3$.

**C19*.** Determinați valorile numerelor reale $a$, $b$, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{(a-1)x^3+(b-2)x^2+3x+4}{x^2+2}$ admite dreapta de ecuație $y=3$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$.

**C20*.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se știe că graficele lui $f$ și $g$ admit ca asimptote la $+\infty$ dreptele de ecuație $y=4$, respectiv $y=1$. Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$.

### 7.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{3x-6}$.

**2.** Demonstrați că există $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x-1}, & x<1\\ 3x-1, & x\ge 1\end{cases}$.





**3.** Determinați numărul asimptotelor verticale ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$.

**4.** Determinați ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ la graficul funcției $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+3x+5}{x}$.

**5.** Determinați valoarea numărului real $a$, pentru care $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+ax}{x+1}-2x\right)=3$.

**6.** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3^x}{1+3^x}$.

Testul 2*

**1.** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3x}{x-1}-2x\right)$.

**2.** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+2}-x\right)$.

**3.** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{3x-1}$.

**4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$. Determinați asimptotele graficului acestei funcții.

**5.** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$ nu admite asimptote verticale.

**6.** Determinați toate asimptotele graficului funcției $f:D\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$.

## 8. Funcții continue

### 8.1. Noțiuni teoretice

#### 8.1.1. Definiții

Fie $f:D\to\mathbb{R}$ și $\alpha\in D$ un punct de acumulare.

**Definiție:** Spunem că funcția $f$ este **continuă** în punctul $\alpha$ dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha)$.

**Teoremă:** Funcția $f$ este continuă în punctul $\alpha$ dacă $\lim\limits_{x\nearrow\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\searrow\alpha}f(x)=f(\alpha)$.

Dacă $\alpha\in D$ este un punct pentru care nu este verificată teorema anterioară, atunci vom spune că punctul $\alpha$ este **punct de discontinuitate**. Dacă limitele sunt finite, îl vom numi **discontinuitate de speța întâi**. În celelalte cazuri, se va numi **discontinuitate de speța a doua**.

**Definiție:** Spunem că funcția $f$ este **continuă pe mulțimea $A$** dacă este continuă în orice punct al mulțimii $A$. Submulțimea maximă a domeniului de definiție în care funcția este continuă se numește **domeniu de continuitate.**

**Teoremă:** Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul de definiție.
**Teoremă:** Suma, diferența, produsul, raportul și compunerea a două funcții continue este, de asemenea, o funcție continuă pe tot domeniul pe care se poate realiza operația respectivă.

### 8.1.2. Funcții continue pe interval

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$.

**Teoremă (Lema intersecției):** Fie $f$ continuă și $a, b \in I$, $a < b$ cu $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$, astfel încât $f(c) = 0$.

**Interpretare geometrică:** Dacă graficul unei funcții $f$ continue pe un interval conține cel puțin un punct situat sub axa $Ox$ și cel puțin un punct situat deasupra axei $Ox$, atunci graficul funcției $f$ intersectează axa $Ox$.

**Consecință (semnul funcției):** Fie $f$ continuă pe $I$ și $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$. Atunci $f$ păstrează același semn pe $I$.

**Consecință (imaginea funcției):** Dacă $f$ este continuă pe $I$, atunci imaginea funcției $f$ este interval.

**Consecință (imaginea unei funcții continue și monotone):** Fie $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă și monotonă. Atunci $\operatorname{Im} f = [f(a), f(b)]$.

## 8.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că $x = 1$ este punct de continuitate pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$.

**I2.** Demonstrați că $x = 2$ este punct de discontinuitate de speța întâi pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ 3x-1, & x>2 \end{cases}$.

**I3.** Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x+2, & x<0 \\ 3, & x=0 \\ x^2+3, & x>0 \end{cases}$ în punctul $x = 0$.

**I4.** Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax-3a, & x<3 \\ 0, & x=3 \\ x^2-9, & x>3 \end{cases}$ este continuă în $x = 3$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.





**I5.** Determinați semnul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$.

**I6.** Determinați semnul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 1$.

**I7.** Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x<-1 \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

**I8.** Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+a, & x<5 \\ 2014, & x=5 \\ bx+2004, & x>5 \end{cases}$ este continuă în $x = 5$.

**I9.** Determinați toate valorile numărului real $a$, pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x \leq 1 \\ \ln(x-1), & x>1 \end{cases}$ este discontinuă în punctul $x = 1$.

**I10.** Determinați mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in (-\infty, 1] \\ x^2+1, & x \in (1, 2) \\ \ln(3x-5), & x \in [2, \infty) \end{cases}$.

## 8.3. Probleme de consolidare

**C1.** Demonstrați că $x = 0$ este punct de continuitate pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$.

**C2.** Demonstrați că $x = 1$ este punct de discontinuitate pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x<1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$.

**C3.** Studiați continuitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2-x, & x \geq 1 \\ -x^2+x, & x<1 \end{cases}$.

**C4.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x-1, & x<0 \\ x^2+x+a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f$ să fie continuă în $x_0 = 0$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C5.** Determinați parametrul real $a$, astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x+2a, & x \geq 1 \\ a^2x+1, & x<1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$.

**C6.** Demonstrați că $x = 2$ este punct de discontinuitate pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2ax + 3, & x < 2 \\ 2ax^3 - 16a + 2, & x \geq 2 \end{cases}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

**C7.** Determinați constantele reale $a$, $b$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și, în plus, să existe $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C8.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x - 10$. Demonstrați că există un număr real $a \in (1, 2)$, pentru care $f(a) = 0$.

**C9.** Determinați semnul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 9$.

**C10.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (2x - 4)(4^x - 16)$. Demonstrați că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**C11.** Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\dfrac{x^2 - x - 12}{3^x - 9} \geq 0$.

**C12.** Determinați toate numerele $x \in (0, \infty)$, pentru care $(x^2 - 9)(\ln x - 1) < 0$.

**C13.** Se consideră o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Calculați $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) f(x)$.

**C14.** Se consideră o funcție continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(1) = 2$. Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3f(x) - 6}{f^2(x) - 4}$.

**C15*.** Demonstrați că funcția $f : [0, 1] \to [1, 1 + e]$, $f(x) = x + e^x$ este bijectivă.

**C16*.** Demonstrați că funcția $f : (1, 2) \to (1, \infty)$, $f(x) = x^2 + \ln x$ nu este surjectivă.

**C17*.** Fie funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 7}{x^3 - 1}$. Determinați $x \in (1, \infty)$, pentru care $f(x) \geq 2$.

**C18*.** Se consideră funcția $f : (1, e) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Demonstrați că există $a \in (1, e)$, pentru care $f(a) = 3$.

**C19*.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 2$ este inversabilă.

**C20*.** Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + t) - f(x)}{t}$. Demonstrați că funcția $g$ este continuă.





## 8.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Studiați continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x < 2 \\ x^2 - 3x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$ în punctul $x = 2$.

**2.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x + 5, & x \leq 0 \\ 3^x + bx + 4, & x > 0 \end{cases}$ este continuă în $x = 0$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

**3.** Determinați semnul funcției $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg x - 3$.

**4.** Determinați numerele reale $x$, pentru care este adevărată egalitatea $(3x - 3)(2^x - 16) < 0$.

**5.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x - 9, & x \leq 2 \\ \dfrac{4x - 8}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

**6.** Determinați mulțimea punctelor de continuitate ale funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3^{x-1}, & x < 1 \\ x^3 + 4^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$.

### Testul 2*

**1.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 2 \end{cases}$. Demonstrați că există $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, dar funcția $f$ nu este continuă în punctul $x = 2$.

**2.** Demonstrați că $x = 3$ este punct de discontinuitate pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 3}, & x < 3 \\ 2x + a, & x \geq 3 \end{cases}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

**3.** Determinați $x \in (0, \infty)$, pentru care are loc inegalitatea $(3^x - 9)(\lg x - 1) \leq 0$.

**4.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 2^x + 5^x$ este surjectivă.

**5.** Demonstrați că ecuația $2^x - 3x = 0$ admite cel puțin o soluție reală pe intervalul $[3, 4]$.

**6.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(3) = 5$. Calculați $\lim\limits_{x \to 3} (f(x) - 5)(x + 1)$.

# 9. Derivata unei funcții

## 9.1. Noțiuni teoretice

### 9.1.1. Definiții

Fie $f: D \to \mathbb{R}$ și $\alpha \in D$.

**Definiție:** Funcția $f$ este **derivabilă** în punctul $\alpha$ dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ există și este finită.

**Notăm:** $f'(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

**Teoremă:** Dacă $f$ este derivabilă în punctul $\alpha$, atunci $f$ este continuă în punctul $\alpha$.

**Interpretare geometrică:** Numărul $f'(\alpha)$ reprezintă panta tangentei duse la graficul funcției $f$ în punctul de coordonate $(\alpha, f(\alpha))$. Ecuația acestei tangente este: $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$.

**Derivate laterale:** derivata la stânga $f_s'(\alpha) = \lim\limits_{x \nearrow \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$; derivata la dreapta $f_d'(\alpha) = \lim\limits_{x \searrow \alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$.

**Teoremă:** Funcția $f$ este derivabilă în punctul $\alpha$ dacă și numai dacă derivatele laterale în $\alpha$ există, sunt finite și egale.

**Definiție:** Submulțimea maximă a domeniului de definiție pe care funcția $f$ este derivabilă se numește **domeniu de derivabilitate**. Notăm $D_d$.

### 9.1.2. Reguli și formule de derivare

Fiecărei funcții $f: D \to \mathbb{R}$ îi putem asocia o nouă funcție $g: D_d \to \mathbb{R}$ definită prin relația $g(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in D_d$, numită **derivata** funcției $f$ și notată pe scurt $f'$. Pentru funcțiile elementare sunt adevărate următoarele formule și condiții:

| Funcția | Derivata | Domeniul de derivabilitate | Funcția compusă | Derivata |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $\mathbb{R}$ | – | – |
| $x^n, n \in \mathbb{N}^*$ | $n \cdot x^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ | $u^n, n \in \mathbb{N}^*$ | $n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha \cdot x^{\alpha-1}$ | $D_{f'} \supset (0, \infty)$ | $u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, u > 0$ | $\alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\dfrac{1}{u}, u \neq 0$ | $-\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(0, \infty)$ | $\sqrt{u}, u > 0$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ |





| Funcția | Derivata | Domeniul de derivabilitate | Funcția compusă | Derivata |
|---|---|---|---|---|
| $\sqrt[n]{x}$ | $\dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $D_{f'} \supset (0, \infty)$ | $\sqrt[n]{u}, u > 0$ | $\dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} \cdot u'$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $e^u$ | $e^u \cdot u'$ |
| $a^x, a > 0, a \neq 1$ | $a^x \cdot \ln a$ | $\mathbb{R}$ | $a^u, a > 0, a \neq 1$ | $a^u \cdot u' \cdot \ln a$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $(0, \infty)$ | $\ln u, u > 0$ | $\dfrac{1}{u} \cdot u'$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ | $(0, \infty)$ | $\log_a u, u > 0$ | $\dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\sin u$ | $\cos u \cdot u'$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $\cos u$ | $-\sin u \cdot u'$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $\operatorname{tg} u, \cos u \neq 0$ | $\dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ | $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ | $\operatorname{ctg} u, \sin u \neq 0$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ |
| $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ | $\arcsin u$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ | $\arccos u$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{arctg} u$ | $\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ | $\operatorname{arcctg} u$ | $-\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |

**Teoremă:** Suma, diferența, produsul și raportul a două funcții derivabile sunt tot o funcție derivabilă și sunt valabile următoarele reguli de derivare:

| | | |
|---|---|---|
| $(f \pm g)' = f' \pm g'$ | $(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'$ | $(k \cdot f)' = k \cdot f'$ |
| $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ | $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ | $(f(u))' = f'(u) \cdot u'$ |

**Derivate de ordin superior:** Dacă derivata unei funcții este, de asemenea, tot o funcție derivabilă, atunci se obține derivata a doua, notată $f''$, definită prin relația $f''=(f')'$. Analog, definim derivatele de ordin superior, mai general $f^{(n+1)}=\left(f^{(n)}\right)'$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

### 9.1.3. Regulile lui l'Hospital

**1. Cazul $\frac{0}{0}$:** Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$ derivabile și $\alpha$ un punct de acumulare pentru intervalul $I$. Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$ și $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ există și este egală cu $l\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ există și este, de asemenea, egală cu $l$.

**2. Cazul $\frac{\infty}{\infty}$:** Fie $f, g: I\to\mathbb{R}$ derivabile și $\alpha$ un punct de acumulare pentru intervalul $I$. Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ există și este egală cu $l\in\overline{\mathbb{R}}$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}$ există și este, de asemenea, egală cu $l$.

## 9.2. Probleme de inițiere

**I1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+3$. Folosind definiția derivatei, calculați $f'(4)$.

**I2.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2x^2+x+1, & x<0\\ 3x^3+x+1, & x\geq 0\end{cases}$ este derivabilă în punctul $x_0=0$.

**I3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-4x+4, & x<2\\ -2x^2+8, & x\geq 2\end{cases}$ este continuă în $x_0=2$, dar nu este derivabilă în acest punct.

**I4.** Calculați derivata funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2014}+2014x+2014$.

**I5.** Se consideră funcțiile $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x+\cos x$ și $g(x)=f''(x)$. Demonstrați că $g''(x)=f(x)$.

**I6.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e-1}{e^{x+1}}$. Demonstrați că $f'(x)=-f(x)$.

**I7.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$. Rezolvați ecuația $f'(x)-f''(x)+f(x)=e^x-3$, unde $x\in\mathbb{R}$.

**I8.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-1$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.





**I9.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$. Determinați ecuația tangentei duse la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=3$.

**I10.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+1$. Determinați $a\in\mathbb{R}$, știind că $f'(3)=11$.

## 9.3. Probleme de consolidare

**C1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\geq 0\\ -x^2+x, & x<0\end{cases}$. Studiați derivabilitatea funcției $f$ în punctul $x=0$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+1, & x<1\\ x^2+5x, & x\geq 1\end{cases}$. Calculați $f'(1)$.

**C3.** Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+4x+4$;

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$;

c) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$;

d) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^7+1$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+e^x$;

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x+5^x$;

g) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-x+1$;

h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2\sin x+3\cos x$;

i) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2^{-x}$;

j) $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$.

*(Variante Bac, 2007-2009)*

**C4.** Calculați derivata fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$;

b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x^2}$;

c) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+3}{x-2}$;

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x^2+4}$;

e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x\cdot\cos x$;

f) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

*(Variante Bac, 2007-2009)*

**C5.** Calculați derivata a doua a fiecăreia dintre următoarele funcții:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-6x+5$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+e^x$;

c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)e^x$;

d) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+2}{x}$;

e) $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-3}$;

f) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\cdot\ln x$.

**C6.** Fie funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = f'(x) + f''(x)$. Demonstrați că $g(2) + g(2^2) + g(2^4) + g(2^8) < \frac{1}{2}$.

**C7.** Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)\ln x$. Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$. Determinați numerele reale $a$, $b$ și $c$, știind că $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C9.** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Arătați că $(x^2 + 1) f''(x) + x \cdot f'(x) = \sqrt{x^2+1}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C10.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \setminus \{e\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$. Demonstrați că $f'(x) = \frac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C11.** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $(0, f(0))$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Determinați punctele de pe graficul funcției $f$, în care panta tangentei la grafic este egală cu 9.

**C13.** Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Determinați punctul în care tangenta la graficul funcției este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C14.** Fie funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f_1(x) = x^2 + 2x + 3$ și $f_{n+1}(x) = (f_n(x))'$. Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_{2012}(x)}{2012x^2}$.

**C15.** Calculați următoarele limite, folosind regula lui l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-5x+4}$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^x - x - 2}{\sin x}$;

g) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin x + \cos x - 1}{x^2 - x}$.

*(Variante Bac, 1998-2009)*





**C16*.** Determinați constantele $a$, $b$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, x \le 2 \\ 2ax^3 + 11a, x > 2 \end{cases}$ să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C17*.** Considerăm funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$ și $g(x) = f'(x) - f''(x)$. Fie $S = g(0) + g(1) + \ldots + g(10)$. Demonstrați că $S > 2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18*.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + b$. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că în punctul de abscisă $x_0 = 1$ graficul funcției admite ca tangentă dreapta de ecuație $y = x + 1$.

**C19*.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Determinați numerele reale $a$, $b$ pentru care $af'(x) + bf''(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**C20*.** Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{x}{1!} - 1}{x^4}$.

## 9.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{100} - 100x + 1$, calculați $f'(1)$.

**2.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Demonstrați egalitatea $f(x) + f''(x) = 2f'(x)$.

**3.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Determinați numerele $a$, $b$, pentru care $f'(1) = 6$ și $f''(2) = 7$.

**4.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$. Demonstrați că tangenta la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 1$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x + 5$.

**5.** Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$.

**6.** Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x$. Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}$.

### Testul 2*

**1.** Demonstrați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$ este derivata funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x$.

**2.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}ax^2+x+1, & x<0\\ e^x, & x\geq 0\end{cases}$ este derivabilă în $x=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

**3.** Fie $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$. Demonstrați că $f'(x)>0$, oricare ar fi $x\in(1,\infty)$.

**4.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$. Determinați punctele de pe graficul funcției cu proprietatea că tangenta la grafic în acel punct are panta egală cu 28.

**5.** Calculați derivata a doua a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$.

**6.** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

## 10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor

### 10.1. Noțiuni teoretice

**Teorema lui Lagrange:** Se consideră o funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe $(a,b)$. Atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange aplicabile pe intervalul $I\subset\mathbb{R}$.

**Consecința 1 (funcții cu derivata nulă):** Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $f'(x)=0$ pentru orice $x\in I$. Atunci $f$ este constantă.

**Consecința 2 (funcții cu derivate egale):** Fie $f,g:I\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile astfel încât $f'(x)=g'(x)$ pentru orice $x\in I$. Atunci $f-g$ este constantă.

**Consecința 3 (monotonia funcțiilor):** Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă.

a) Dacă $f'(x)>0$ pentru orice $x\in I$, atunci $f$ este strict crescătoare pe $I$;

b) Dacă $f'(x)<0$ pentru orice $x\in I$, atunci $f$ este strict descrescătoare pe $I$.

**Consecința 4:** Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă. Fie $\alpha\in I$ astfel încât $f$ este derivabilă pe $I\setminus\{\alpha\}$. Dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}f'(x)$ există și este egală cu $l$, atunci $f$ este derivabilă în punctul $\alpha$ și, în plus, $f'(\alpha)=l$.

Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval și funcția $f:I\to\mathbb{R}$.

**Definiție:** Funcția $f$ se numește convexă dacă, oricare ar fi $x,y\in I$ și oricare ar fi $t\in(0,1)$, avem relația $f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$. Funcția $f$ se numește concavă dacă, oricare ar fi $x,y\in I$ și oricare ar fi $t\in(0,1)$, avem relația $f(tx+(1-t)y)\geq tf(x)+(1-t)f(y)$.





**Interpretare geometrică:** O funcție este convexă dacă, pentru orice puncte $A,B\in G_f$, segmentul $[AB]$ este poziționat deasupra porțiunii de grafic cuprinse între punctele $A$ și $B$.

**Consecința 5 (convexitatea funcțiilor):** Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori.

a) Dacă $f''(x)>0$ pentru orice $x\in I$, atunci $f$ este convexă pe $I$.

b) Dacă $f''(x)<0$ pentru orice $x\in I$, atunci $f$ este concavă pe $I$.

### 10.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+3x+1$ este strict crescătoare.

**I2.** Determinați coordonatele punctului de extrem al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+3$.

**I3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6+2x^2$ este convexă.

**I4.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$ admite două puncte de extrem.

**I5.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a\cdot 2^x+x$ este strict crescătoare pentru orice $a\in(0,\infty)$.

**I6.** Demonstrați că funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ este strict descrescătoare.

**I7.** Demonstrați că graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2$ admite un singur punct de inflexiune.

**I8.** Determinați intervalele pe care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$ este strict crescătoare.

**I9.** Determinați intervalul pe care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+2014$ este convexă.

**I10.** Determinați numărul punctelor de extrem al funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^7$.

### 10.3. Probleme de consolidare

**C1.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^{2015}+1$ este strict crescătoare.

**C2.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^{2014}$ este convexă.

**C3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^4}$ admite un singur punct de extrem local.

*(Variante Bac, 2007)*

**C4.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2+x-1$ este strict crescătoare.

**C5.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}-2008(x-1)-1$. Demonstrați că funcția $f$ este convexă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C6.** Considerăm funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln(1+x^2)$. Demonstrați că aceste funcții au același punct de extrem local.

*(Variante Bac, 2007)*

**C7.** Considerăm funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x^2)$. Demonstrați că derivata funcției $f$ este strict descrescătoare.

**C8.** Fie $f:\mathbb{R}-\{2007\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2007x-1}{x-2007}$. Demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 2007)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C9.** Fie $f:\mathbb{R}-\{2007\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2007x-1}{x-2007}$. Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(-\infty, 2007)$ și concavă pe intervalul $(2007, \infty)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C10.** Considerăm funcțiile $f, g:[0, 1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln(1+x^2)$. Demonstrați că funcția $f-g$ este convexă pe $[0, 1]$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C11.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C12.** Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3^x+3^{-x}$. Demonstrați că funcția $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C13.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. Demonstrați că $f(2\sqrt{3})>f(3\sqrt{2})$.

**C14.** Se consideră funcția $f:[0, \infty)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$. Demonstrați că $\dfrac{1}{2}\le f(x)<2$, pentru orice $x\in[0, \infty)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Fie $f:[1, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $g:[1, \infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x^4$. Demonstrați că $g(x)\le f(x)$, pentru orice $x\in[1, \infty)$.

*(Variante Bac, iunie 1998)*

**C16*.** Se consideră o funcție derivabilă $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f'(x)=e^{x^2}$, pentru orice $x\in(0, \infty)$. Demonstrați că funcția $f$ este convexă.

**C17*.** Demonstrați că $e^x\ge x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**C18*.** Fie funcția $f:(2, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$. Demonstrați că $f(x)+f(x^2)+f(x^3)\ge 24$, pentru orice $x\in(2, \infty)$.

**C19*.** Demonstrați că funcția $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x+x^3-3x^2+3x$ este bijectivă.

**C20*.** Fie $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. Determinați numerele reale $a, b, c\in(0, \infty)$, pentru care $f(a)+f(b)+f(c)=6$.





## 10.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ este strict crescătoare pe intervalul $(-1, \infty)$.

**2.** Determinați coordonatele punctului de extrem al funcției $f:(3, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$.

**3.** Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-4x+2$.

**4.** Determinați intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+4$.

**5.** Fie funcția $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. Demonstrați că $f(x)\ge 2$, pentru orice $x>0$.

**6.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^{2013}$ este injectivă.

### Testul 2*

**1.** Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

**2.** Determinați coordonatele punctelor de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-3)e^x$.

**3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{3}+x^2+1$ este convexă.

**4.** Determinați coordonatele punctului de inflexiune al graficului funcției $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

**5.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$ verifică relația $f(3\ln 2)<f(2\ln 3)$.

**6.** Fie $f:[1, 3]\to[2, 6+\ln 3]$, $f(x)=2x+\ln x$. Demonstrați că funcția este bijectivă.

## 11. Probleme de sinteză – analiză matematică

**1.** Se consideră funcția $f:(0, \infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

a) Demonstrați că graficul funcției nu admite asimptote la $+\infty$.
b) Demonstrați că funcția $f$ este bijectivă.
c) Demonstrați că funcția $f$ nu are puncte de inflexiune.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

a) Calculați derivata acestei funcții.

b) Determinați valorile extreme ale acestei funcții.

c) Determinați numerele reale $a, b, c$, pentru care $f(a)+f(b)+f(c)=\frac{3}{2}$.

**3.** Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$ la graficul funcției;
b) Calculați derivata funcției $f$.
c) Demonstrați că, pentru orice $x>1$, avem $f(x^2)+f(x^3)\geq 8$.

**4.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați derivata funcției $f$.
b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.
c) Demonstrați că $3^{\sqrt{3}}<5^{\sqrt{3}}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**5.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

a) Demonstrați că $x=0$ este punct de minim pentru funcția $f$.
b) Determinați imaginea funcției $f$.
c) Demonstrați că $e^{x^{2008}}+e^{x^{208}}\geq x^{2008}+x^{208}+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**6.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)^2+(x-1)^2$.

a) Demonstrați că $f'(x)=4x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

c) Demonstrați că $f'(x)\leq e^{4x}-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**7.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

a) Calculați derivata funcției $f$.
b) Determinați imaginea funcției $f$.
c) Demonstrați că, oricare ar fi numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ distincte, avem $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2012})<2012$.

**8.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

a) Calculați $f'(x), x\in\mathbb{R}^*$.

b) Demonstrați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $(0, 2)$.

c) Demonstrați că $2e^{\sqrt{3}}\leq 3e^{\sqrt{2}}$.

*(Variante Bac, 2009)*





**9.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

a) Demonstrați că această funcție este convexă.
b) Determinați punctele de extrem ale acestei funcții.
c) Arătați că $0{,}1^{0{,}1}>e^{-\frac{1}{e}}$.

**10.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x^2+3$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $x_0=2$.
b) Arătați că $f$ este convexă pe $[1,\infty)$.
c) Determinați numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x)=0$.

**11.** Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln(x+1)$.

a) Calculați $f'(x)$.
b) Demonstrați că funcția este strict crescătoare pe domeniul de definiție.
c) Deduceți inegalitatea $\ln(x+1)<x$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

**12.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}e^x-1, & x<0\\ x^2+x+a, & x\geq 0\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $a$ astfel încât funcția $f$ să fie continuă în punctul $x_0=1$.
b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x_0=-1$.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+f(x)}{x^2+x}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**13.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

a) Calculați $f'(x)$, pentru $x\in(0,\infty)$.
b) Demonstrați că $f(x)\leq e^{-1}$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.
c) Demonstrați că $2011^{2012}>2012^{2011}$.

**14.** Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+1+\sqrt{3x+16}$.

a) Demonstrați că $f$ este strict crescătoare;
b) Demonstrați că $f(x)\geq 5$, pentru orice $x\geq 0$.
c) Demonstrați că există un singur $a\in(0,\infty)$, pentru care $f(a)=24$, și determinați această valoare.

**15.** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$.

a) Demonstrați că $f'(x)=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.

c) Arătați că $e\ln x\leq 2\sqrt{x}$, pentru orice $x>1$.

*(Variante Bac, 2004)*

**16.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$ la graficul funcției.
b) Calculați derivata funcției.
c) Demonstrați că funcția $f$ este strict descrescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**17.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Calculați $f'(x)$.
b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.
c) Arătați că $0<f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[0,\infty)$.

**18.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x+x^2}$.

a) Calculați derivata funcției $f$.
b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=0$.
c) Demonstrați că $-\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 1$, $x\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2007)*

**19.** Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ este strict descrescătoare.
b) Demonstrați că $f(2\sqrt[3]{5})>f(3\sqrt[3]{3})$.
c) Demonstrați că funcția $f$ este convexă.

**20.** Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x}-\ln x$.

a) Demonstrați că graficul funcției $f$ nu admite asimptotă la $+\infty$.
b) Demonstrați că funcția $f$ admite un singur punct de extrem.
c) Deduceți inegalitatea $1+x\ln x\ge x$, $x\in(0,\infty)$.

*(Variante Bac, 2007)*



# Clasa a XII-a

## 1. Legi de compoziție

### 1.1. Noțiuni teoretice

#### 1.1.1. Legi de compoziție

Fie $G$ o mulțime nevidă și o lege „$*$”. Legea „$*$”:

- este **lege de compoziție** pe $G$ dacă $x*y\in G$ pentru orice $x,y\in G$ (se mai spune că mulțimea $G$ este **parte stabilă** în raport cu legea „$*$”);
- este **comutativă** dacă $x*y=y*x$ pentru orice $x,y\in G$;
- este **asociativă** dacă $x*(y*z)=(x*y)*z$ pentru orice $x,y,z\in G$;
- admite **element neutru** dacă există un element $u\in G$, astfel încât $x*u=u*x=x$ pentru orice $x\in G$;
- este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x\in G$ există un element $x'\in G$, astfel încât $x*x'=x'*x=u$.

**Observație:** Elementul $x'$ se numește **simetricul** lui $x$ în raport cu legea de compoziție „$*$”.

Dacă $G$ este finit, atunci putem scrie $G=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Toate rezultatele posibile pot fi trecute sub forma următorului tabel:

| $*$ | $a_1$ | $a_2$ | $\dots$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ |
| $a_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$ | $a_{2n}$ |
| $\vdots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $a_n$ | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | $\dots$ | $a_{nn}$ |

unde $a_{ij}=a_i*a_j$. Se obține **tabla operației**. Proprietățile legii se pot deduce apoi din această tablă.

#### 1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Se consideră mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ și $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$, definim mulțimea $\hat{r}=\{z\in\mathbb{Z}\mid \text{restul împărțirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}$. Mulțimea $\mathbb{Z}_n=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\dots,\widehat{n-1}\}$ se numește mulțimea **claselor de resturi modulo $n$**.

Definim operațiile:

- $\hat{x}+\hat{y}=\hat{z}$, unde $z$ este restul împărțirii numărului $x+y$ la $n$;
- $\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{t}$, unde $t$ este restul împărțirii numărului $xy$ la $n$.

**Proprietăți:**

- adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție asociativă și comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;
- înmulțirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea;
- înmulțirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
- evident, $\hat{0}\cdot\hat{x}=\hat{0}$ pentru orice $\hat{x}\in\mathbb{Z}_n$;
- dacă $n$ este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y}=\hat{0}$ obținem $\hat{x}=\hat{0}$ sau $\hat{y}=\hat{0}$; dacă $n$ nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3}\cdot\hat{4}=\hat{0}$);
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y}=\hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ și se notează $\hat{x}^{-1}$;
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă și numai dacă numerele $x$ și $n$ admit divizor comun doar pe 1.

## 1.2. Probleme de inițiere

**I1.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Calculați $4\circ 9$.

**I2.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstrați că această lege este comutativă.

**I3.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstrați că această lege este asociativă.

**I4.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Demonstrați că 3 este elementul neutru al acestei legi.

**I5.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul elementului $x=7$ în raport cu această lege.

**I6.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\circ$" prin $x\circ y=x+y-3$. Determinați valoarea numărului real $x$, pentru care $x\circ x\circ x=21$.

**I7.** În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2}+\hat{5}$.

**I8.** În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2}\cdot\hat{5}$.

**I9.** Considerăm mulțimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y\in C$, avem $X+Y\in C$.

**I10.** Considerăm mulțimea $C=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y\in C$, avem $X\cdot Y\in C$.





## 1.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră operația „$\perp$" definită prin $x\perp y=x^y+y^x$, pentru orice $x, y\in(0,\infty)$. Calculați $2\perp 3$.

**C2.** Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$" prin $x*y=xy-4x-4y+20$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Determinați $t\in\mathbb{R}$, știind că $t*t=4$.

*(Variante Bac, 2004)*

**C3.** Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$" prin relația $x*y=xy-2x-2y+6$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $z*3=3*z=z$ pentru orice $z\in\mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C4.** Se consideră mulțimea $A=\{2k\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y\in A$, avem $x+y\in A$.

**C5.** Pe mulțimea $G=(-4,\infty)$ definim operația „$\circ$" prin $x\circ y=xy+4x+4y+12$, pentru orice $x, y\in G$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y\in G$, avem $x\circ y\in G$.

**C6.** Considerăm operația „$\bullet$" definită prin $x\bullet y=x+y-6$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $x\bullet(y\bullet z)=(x\bullet y)\bullet z$, pentru orice $x, y, z\in\mathbb{R}$.

**C7.** Demonstrați că operația „$*$", definită prin $x*y=xy+x+y$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, este asociativă.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Se consideră mulțimea $M=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea $M$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

**C9.** Determinați elementul neutru al legii „$\perp$" definită prin $x\perp y=\sqrt{x^2+y^2}$, pentru orice $x, y\in[0,\infty)$.

*(Variante Bac, 2006)*

**C10.** Se consideră operația „$\perp$" definită prin $x\perp y=\dfrac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că această operație este comutativă, dar nu este asociativă.

**C11.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$" definită prin $x*y=xy-2x-2y+6$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați elementele simetrizabile.

**C12.** Determinați valoarea numărului real $a$, știind că operația „$*$" definită prin $x*y=x+y-a$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, admite pe 2 ca element neutru.

**C13.** Se consideră operația „$*$" definită prin $x*y=xy-3x-3y+a$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Determinați numărul real $a$, știind că operația „$*$" este asociativă.

**C14.** Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că înmulțirea matricelor este lege de compoziție pe mulțimea $G$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C15.** Fie mulțimea $A = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}\} \subset \mathbb{Z}_8$. Demonstrați că mulțimea $A$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea din $\mathbb{Z}_8$.

**C16*.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2)+2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului real $x$ care verifică relația $x \perp x \perp x = 10$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17*.** Se consideră mulțimea $A = \{a+b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că mulțimea $A$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor reale.

**C18*.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$" prin $x \perp y = (x-2)(y-2)+2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Știind că operația este asociativă, calculați $10 \perp 9 \perp 8 \perp \ldots \perp 1 \perp 0$.

**C19*.** Demonstrați că operația „$*$" este asociativă, unde $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3+1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

**C20*.** Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$*$" prin relația $x * y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Dați exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, pentru care $a * b \in \mathbb{Z}$.

### 1.4. Teste de verificare

#### Testul 1

1. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că această lege este asociativă.
2. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați elementul neutru al acestei legi.
3. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y \in (-2, \infty)$, avem $x \circ y \in (-2, \infty)$.
4. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile reale ale numărului $a$ pentru care $a \circ a = 7$.
5. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați un element $c \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $x \circ c = c \circ x = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
6. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Calculați: $(-5) \circ (-4) \circ (-3) \circ (-2) \circ (-1) \circ 0$.





#### Testul 2*

1. Considerăm legea „$*$" definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3-8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că legea „$*$" este asociativă.
2. Considerăm legea „$*$" definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3-8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați elementul neutru al acestei legi.
3. Considerăm legea „$*$" definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3-8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrați că orice $x \in \mathbb{R}$ este simetrizabil în raport cu legea „$*$".
4. Considerăm legea „$*$" definită prin $x * y = \sqrt[3]{x^3+y^3-8}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Determinați toate valorile reale ale numărului $a$ care verifică egalitatea $a * a * a = \sqrt[3]{-13}$.
5. Considerăm legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$. Știind că legea admite element neutru pe $-1$, determinați elementele simetrizabile ale acestei legi.
6. Fie $G = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că această mulțime este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor întregi.

## 2. Structuri algebrice. Morfisme

### 2.1. Noțiuni teoretice

#### 2.1.1. Structuri algebrice

Perechea $(G, *)$ formează o structură de:

- **monoid** dacă „$*$" este lege de compoziție asociativă și cu element neutru;
- **monoid comutativ** dacă „$*$" este lege de compoziție asociativă, cu element neutru și comutativă;
- **grup**, dacă „$*$" este lege de compoziție asociativă, cu element neutru și simetrizabilă;
- **grup comutativ (abelian)**, dacă „$*$" este lege de compoziție asociativă, cu element neutru, simetrizabilă și comutativă.

**Exemple fundamentale:**

Monoid: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$;

Monoid comutativ: $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$;

Grup: $(A, \cdot)$, unde $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \det(M) \neq 0\}$;

Grup comutativ: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$.

Fie $\oplus$ și $\otimes$ două legi de compoziție definite pe mulțimea $G$. Spunem că legea $\otimes$ este **distributivă** în raport cu legea $\oplus$ dacă $x\otimes(y\oplus z)=(x\otimes y)\oplus(x\otimes z)$ și $(x\oplus y)\otimes z=(x\otimes z)\oplus(y\otimes z)$, pentru orice $x, y, z\in G$.

Tripletul $(G, \oplus, \otimes)$ formează o structură de:

• **inel**, dacă $(G, \oplus)$ este grup comutativ, $(G, \otimes)$ este monoid și legea $\otimes$ este distributivă în raport cu legea $\oplus$;

• **inel comutativ**, dacă $(G, \oplus)$ este grup comutativ, $(G, \otimes)$ este monoid comutativ și legea $\otimes$ este distributivă în raport cu legea $\oplus$;

• **corp**, dacă $(G, \oplus)$ este grup comutativ, $(G\setminus\{e\}, \otimes)$ este grup ($e$ reprezintă elementul neutru al primei operații) și legea $\otimes$ este distributivă în raport cu legea $\oplus$;

• **corp comutativ**, dacă $(G, \oplus)$ este grup comutativ, $(G\setminus\{e\}, \otimes)$ este grup comutativ ($e$ reprezintă elementul neutru al primei operații) și legea $\otimes$ este distributivă în raport cu legea $\oplus$.

**Exemple fundamentale:**

Inel: $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$;

Inel comutativ: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$;

Corp comutativ: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

### 2.1.2. Morfisme

Fie $(G, *)$ și $(H, \circ)$ două grupuri și funcția $f:G\to H$.

Funcția $f$ este:

• **morfism de grupuri**, dacă $f(x*y)=f(x)\circ f(y)$ pentru orice $x, y\in G$;

• **izomorfism de grupuri**, dacă este un morfism bijectiv.

Grupurile $(G, *)$ și $(H, \circ)$ se numesc **izomorfe** și notăm $G\simeq H$ dacă există un izomorfism definit între ele.

## 2.2. Probleme de inițiere

**I1.** Considerăm mulțimea $A=\{-1, 1\}$. Demonstrați că $A$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

**I2.** Considerăm mulțimea $B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n \text{ este număr par}\}$. Demonstrați că $(B, +)$ este monoid comutativ.

**I3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to(0, \infty)$, $f(x)=e^x$ este morfism între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, \infty), \cdot)$.





**I4.** Pe $\mathbb{R}$ definim legile „$*$” și respectiv „$\perp$”, definite prin $x*y=x+y-1$ și respectiv $x\perp y=x+y+3$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$ verifică relația $f(x*y)=f(x)\perp f(y)$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

**I5.** Demonstrați că mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\middle|\, a, b\in\mathbb{R}\right\}$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de adunare.

**I6.** Demonstrați că mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle|\, a\in(0, \infty)\right\}$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

**I7.** Determinați toate valorile lui $x\in\mathbb{Z}_4$, pentru care $\hat{3}+x=\hat{2}$.

**I8.** Determinați toate valorile lui $x\in\mathbb{Z}_6$, pentru care $\hat{3}\cdot x=\hat{0}$.

**I9.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{3}\\ \hat{3} & \hat{2}\end{pmatrix}$ cu coeficienți din $\mathbb{Z}_5$. Calculați determinantul acestei matrice.

**I10.** Determinați suma elementelor simetrizabile ale inelului $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.

## 2.3. Probleme de consolidare

**C1.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$\perp$” prin $x\perp y=x+y-2$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Demonstrați că $(\mathbb{R}, \perp)$ este un grup comutativ.

*(Variante Bac, 2009)*

**C2.** Pe mulțimea $A=(3, \infty)$ definim operația „$*$” prin $x*y=xy-3x-3y+12$, pentru orice $x, y\in A$. Demonstrați că $(A, *)$ este grup comutativ.

**C3.** Se consideră mulțimea $G=\left\{X(a)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\middle|\, a\in\mathbb{R}\right\}$. Demonstrați că mulțimea $G$ formează o structură de grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

**C4.** Se consideră mulțimea $A=\{2^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Demonstrați că $A$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a numerelor raționale.

**C5.** Pe $\mathbb{Z}$ definim legea „$*$” prin $x*y=xy+x+y$, pentru orice $x, y\in\mathbb{Z}$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid comutativ.

*(Variante Bac, 2008)*

**C6.** Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$\circ$” prin $x\circ y=xy-3x-3y+12$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$. Considerăm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$. Demonstrați că $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$.

**C7.** Se consideră mulțimea $A = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\} \subset \mathbb{Z}_6$. Demonstrați că $(A, +)$ este grup comutativ.

**C8.** Se consideră mulțimea $A = \{a+b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Demonstrați că $A$ formează o structură de inel comutativ în raport cu adunarea și înmulțirea numerelor reale.

**C9.** Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că $(G, +, \cdot)$ este inel comutativ.

**C10.** Demonstrați că mulțimea numerelor reale formează o structură de corp comutativ în raport cu operațiile „$\perp$" și „$*$", unde $x \perp y = x + y - 1$, iar $x * y = xy - x - y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

**C11.** Demonstrați că matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ este un element inversabil al inelului $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**C12.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Calculați suma $\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}+\hat{5}+\hat{6}+\hat{7}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C13.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Calculați $\hat{2}^{2012}$.

**C14.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$. Determinați produsul elementelor inversabile ale acestui inel.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Calculați determinantul matricei $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_6)$, unde $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

**C16*.** Pe $\mathbb{R}$ definim operația „$\circ$" prin $x \circ y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$. Determinați valoarea numărului real $a$, știind că $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C17*.** Pe $(-1, 1)$ definim legea de compoziție „$*$" prin $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Demonstrați că funcția $f: (-1, 1) \to (0, \infty)$, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ verifică relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18*.** Se consideră mulțimea $G = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 2009^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că mulțimea $G$ formează o structură de grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

*(Variante Bac, 2008)*





**C19*.** Fie inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. Se notează cu $S$ suma rădăcinilor ecuației $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ și cu $P$ produsul rădăcinilor ecuației $x^2 = x$. Calculați $S + P$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C20*.** Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$. Determinați soluțiile sistemului $\begin{cases} \hat{3}x + y = \hat{5} \\ \hat{5}x + \hat{2}y = \hat{2} \end{cases}$.

*(Variante Bac, 2009)*

## 2.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Considerăm mulțimea $B = \{n \in \mathbb{Z} | n \text{ este număr impar}\}$. Demonstrați că $(B, \cdot)$ este monoid comutativ.

**2.** Demonstrați că $(\mathbb{R}, \perp)$ formează o structură de grup comutativ, unde legea „$\perp$" este definită prin $x \perp y = x + y + 2014$.

**3.** Demonstrați că mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

**4.** În grupul $(\mathbb{Z}_{10}, +)$, calculați suma $\hat{2}+\hat{4}+\hat{6}+\hat{8}$.

**5.** În inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$, demonstrați egalitatea $\hat{1}+\hat{3}+\hat{5} = \hat{3}^{12}$.

**6.** Considerăm mulțimea $G = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R} \right\}$ și funcția $f: \mathbb{R} \to G$, $f(t) = X(t)$. Demonstrați că $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

### Testul 2*

**1.** Demonstrați că mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ formează o structură de grup comutativ în raport cu operația de adunare a matricelor.

**2.** Demonstrați că mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{R} \right\}$ formează o structură de monoid comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

**3.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$" prin $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$. Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, are loc egalitatea $f\left(\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ ori de } x}\right) = (f(x))^n$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**4.** Considerăm inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$. Determinați $x \in \mathbb{Z}_7$ care verifică egalitatea $\hat{5} \cdot x + \hat{4} = \hat{3}$.

**5.** În $\mathbb{Z}_5$, definim legea $x * y = x + y + \hat{2}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_5$. Demonstrați că $(\mathbb{Z}_5, *)$ formează o structură de grup comutativ.

**6.** Calculați probabilitatea ca un element al inelului $(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ să fie inversabil.

# 3. Polinoame

## 3.1. Noțiuni teoretice

### 3.1.1. Terminologie

Fie $K$ una dintre mulțimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

Forma algebrică a unui polinom: $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

- numerele $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ se numesc **coeficienți**, numărul $a_0$ se mai numește **termen liber**, iar $a_n$ **coeficient dominant**;
- litera $X$ reprezintă **nedeterminata**;
- polinomul $f = 0$ se numește **polinomul nul**;
- pentru orice polinom nenul, avem $a_n \neq 0$, iar $n$ reprezintă gradul polinomului și se notează grad $f$;
- mulțimea polinoamelor cu coeficienți în $K$ se notează $K[X]$.

Fie polinoamele $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ și $g = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + ... + b_1 X + b_0$. Atunci $f = g$, numai dacă $m = n$ și $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ etc.

Fie $\alpha \in K$. Numărul $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0$ se notează $f(\alpha)$ și se numește **valoarea polinomului** $f$ în punctul $\alpha$. Dacă $f(\alpha) = 0$, atunci $\alpha$ este **rădăcină** a polinomului $f$.

### 3.1.2. Operații cu polinoame

**Adunarea polinoamelor:**

- operația este asociativă, comutativă și admite element neutru polinomul nul;
- avem $\text{grad}(f+g) \leq \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$, pentru orice polinoame $f$, $g$.

**Înmulțirea polinoamelor:**

- operația este asociativă, comutativă și distributivă în raport cu adunarea;
- avem $\text{grad}(fg) = \text{grad } f + \text{grad } g$, pentru orice polinoame $f$, $g$ nenule.

**Teorema împărțirii cu rest:** Fie $K$ una dintre mulțimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ și $f, g \in K[X]$ două polinoame, $g$ nenul. Atunci există și sunt unice polinoamele $c, r \in K[X]$ cu grad $r <$ grad $g$, astfel încât $f = gc + r$.





Polinomul $c$ reprezintă **câtul** împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g$, iar polinomul $r$ reprezintă **restul** acestei împărțiri.

**Teorema restului:** Restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g = X - \alpha$ este egal cu $f(\alpha)$.

**Schema lui Horner:**

- se aplică pentru determinarea câtului și restului împărțirii polinomului $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$ la polinomul $g = X - \alpha$;
- se utilizează tabelul:

| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | $a_{n-2}$ | ... | $a_1$ | $a_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $b_n$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}$ | ... | $b_1$ | $b_0$ |

unde $b_n = a_n$, $b_{n-1} = \alpha b_n + a_{n-1}$, $b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-2}$, ..., $b_1 = \alpha b_2 + a_1$ și $b_0 = \alpha b_1 + a_0$;

- atunci câtul este polinomul $g = b_n X^{n-1} + b_{n-1} X^{n-2} + ... + b_2 X + b_1$ și restul $r = b_0$.

### 3.1.3. Divizibilitate

**Definiție:** Polinomul $f$ este **divizibil** cu polinomul $g$ dacă există polinomul $h$ astfel încât $f = gh$. Notăm $f \vdots g$ sau $g \mid f$.

**Proprietăți:** Divizibilitatea polinoamelor are următoarele proprietăți:

**D1.** Dacă $f \mid g$ și $g \mid h$, atunci $f \mid h$.

**D2.** Dacă $f \mid g$, atunci $f \mid gh$.

**D3.** Dacă $f \mid g$ și $f \mid h$, atunci $f \mid (g \pm h)$.

**D4.** Polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $g = X - \alpha$ dacă și numai dacă $f(\alpha) = 0$.

**D5.** Dacă $f$ este divizibil simultan cu $X - \alpha$ și $X - \beta$, unde $\alpha \neq \beta$, atunci $f$ este divizibil cu $(X - \alpha) \cdot (X - \beta)$.

**Definiție:** Un polinom $f \in K[X]$ se numește **reductibil** dacă există polinoamele $g, h \in K[X]$, cu grad $g <$ grad $f$ și grad $h <$ grad $f$, astfel încât $f = gh$. În caz contrar, se numește **ireductibil.**

### 3.1.4. Rădăcinile unui polinom

**Teorema fundamentală a algebrei:** Orice polinom cu coeficienți complecși admite cel puțin o rădăcină complexă.

**Teorema lui Bézout:** Numărul $\alpha$ este rădăcină a polinomului $f$ dacă și numai dacă $f$ este divizibil cu $X - \alpha$.

**Consecință:** Orice polinom $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ admite $n$ rădăcini complexe $x_1, x_2, ..., x_n$, nu neapărat distincte. Polinomul se descompune în factori $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \cdot ... \cdot (X - x_n)$.

**Observație:** Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul zero și unu. Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt cele de gradul zero, gradul I și gradul al II-lea cu $\Delta<0$.

**Rădăcini multiple:**

- dacă $x_1=x_2$, vom spune că $x_1$ este rădăcină de ordin doi sau rădăcină dublă;
- dacă $x_1=x_2=x_3$, vom spune că $x_1$ este rădăcină de ordin trei sau rădăcină triplă etc.;
- numărul $\alpha$ este rădăcină de ordin doi pentru polinomul $f$ dacă și numai dacă $f(\alpha)=0$ și $f'(\alpha)=0$;
- numărul $\alpha$ este rădăcină de ordin trei pentru polinomul $f$ dacă și numai dacă $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$ și $f''(\alpha)=0$ etc.

### 3.1.5. Ecuații de grad superior

**Forma generală a unei ecuații algebrice de gradul $n$:** $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$, unde coeficienții $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{C}$, $a_n\neq 0$.

**Proprietăți ale rădăcinilor:**

- dacă $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{R}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1=a+bi$ cu $a, b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, atunci $x_2=a-bi$;
- dacă $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{Q}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1=a+b\sqrt{c}$ cu $a, b\in\mathbb{Q}$, $b\neq 0$, $c\in\mathbb{N}$, liber de pătrate, atunci $x_2=a-b\sqrt{c}$;
- dacă $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{Z}$ și ecuația admite o rădăcină $x_1=\frac{a}{b}$ cu $a, b\in\mathbb{Z}$, $b\neq 0$, atunci $a\mid a_0$ și $b\mid a_n$;
- dacă $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\in\mathbb{Z}$, $a_n=1$, atunci singurele rădăcini raționale ale acestei ecuații se pot găsi eventual printre divizorii numărului $a_0$.

**Ecuația de gradul al III-lea:** $ax^3+bx^2+cx+d$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

**Observație:** Cele trei rădăcini pot fi toate trei reale sau una reală și celelalte două complexe nereale conjugate.

**Relațiile lui Viète:** Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem:

$$S_1=x_1+x_2+x_2=-\frac{b}{a},\qquad S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}\quad\text{și}\quad S_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

**Ecuația de gradul al IV-lea:** $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, $a, b, c, d, e\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$.

**Observație:** Cele patru rădăcini pot fi toate patru reale sau două reale și celelalte două complexe nereale conjugate sau toate patru complexe nereale și două conjugatele celorlalte două.





**Relațiile lui Viète:** Sunt adevărate indiferent de tipul rădăcinilor și avem:

$$S_1=x_1+x_2+x_2+x_4=-\frac{b}{a},\qquad S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a},$$

$$S_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a},\qquad S_4=x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}.$$

## 3.2. Probleme de inițiere

**I1.** Considerăm polinomul $f=X^{23}-5X^{12}+3X^7-X$. Calculați $f(-1)$.

**I2.** Demonstrați că polinoamele $f=(X-1)(X^2-5X+6)$ și $g=(X-3)(X^2-3X+2)$ sunt egale.

**I3.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f=2X^4+5X^3+3X^2+2X+5$ la polinomul $g=X+2$.

**I4.** Demonstrați că polinomul $f=X^4-4X^3+6X^2-4X+1$ este divizibil cu polinomul $g=X^2-2X+1$.

**I5.** Considerăm polinoamele $f, g, h\in\mathbb{Z}_4[X]$, $f=\hat{2}X+\hat{1}$, $g=\hat{2}X+\hat{3}$ și $h=\hat{3}$. Demonstrați că $f\cdot g=h$.

**I6.** Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+3X-a$. Determinați valoarea numărului real $a$, știind că polinomul $f$ admite rădăcina $x_1=-1$.

**I7.** Fie $x_1$, $x_2$ și $x_3$ rădăcinile polinomului $f=X^3-3X^2+2X-3$. Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+x_1\cdot x_2\cdot x_3=3(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)$.

**I8.** Considerăm polinomul $f=X^4-(m+1)X^3+2X^2-mX+3$, unde $m\in\mathbb{R}$. Notăm cu $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ rădăcinile sale. Determinați valoarea lui $m$, dacă $x_1+x_2+x_3+x_4=2014$.

**I9.** Determinați toate rădăcinile polinomului $f=X^3-2X^2-4X+8$, știind că una dintre rădăcini este $x_1=2$.

**I10.** Descompuneți polinomul $f=X^4-16$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

## 3.3. Probleme de consolidare

**C1.** Determinați numerele reale $a$, $b$, $c$, știind că polinoamele $f=X^3+aX^2+bX+c$ și $g=(X-2)(X-3)(X+1)$ sunt egale.

*(Variante Bac, 1994)*

**C2.** Fie polinomul $f=X^4-6X^3+18X^2-30X+25\in\mathbb{R}[X]$. Arătați că $f$ se divide cu $X^2-2X+5$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C3.** Determinați polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$ de gradul doi care verifică condițiile $f(0)=5$, $f(1)=7$ și $f(2)=11$.

**C4.** Se consideră polinomul $f=(X^2-X-1)^{1006}+2$. Forma sa algebrică este $f=a_{2012}X^{2012}+a_{2011}X^{2011}+\ldots+a_1X+a_0$. Calculați suma $a_0+a_1+\ldots+a_{2011}+a_{2012}$.

**C5.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{10}+3X^5+aX+4 \in \mathbb{R}[X]$. Arătați că restul împărțirii polinomului $f$ la $X+1$ nu depinde de $a$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C6.** Determinați numărul real $a$, pentru care polinomul $f=X^4+X^3+aX^2-aX-6$ este divizibil cu polinomul $g=X-2$.

**C7.** Se consideră polinomul $f=\hat{3}X+\hat{1} \in \mathbb{Z}_9[X]$. Determinați gradul lui $f^2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f=X^4-3X^3+X^2+aX+b \in \mathbb{R}[X]$. Determinați $a$ și $b$, astfel încât restul împărțirii polinomului $f$ la $X^2-X+1$ să fie egal cu $X-2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C9.** Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_6[X]$, $f=X^3+(\hat{2}a+\hat{1})X+a+\hat{4}$. Determinați $a \in \mathbb{Z}_6$, știind că $f(\hat{2})=\hat{0}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C10.** Descompuneți polinomul $f=X^3+X^2+X+1$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

**C11.** Se consideră polinomul $g=X^2-X-1$. Dacă $y$ este o rădăcină a polinomului $g$, demonstrați că $y^3=2y+1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12.** Fie polinomul $f=X^3-6X^2+11X-6 \in \mathbb{R}[X]$. Dacă notăm cu $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile sale, calculați $S=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

**C13.** Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2-5X+14 \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu $S_n=x_1^n+x_2^n+x_3^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Demonstrați că $S_3+42=4S_2+5S_1$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C14.** Se consideră polinomul $f=X^4-2X^3+4X^2+aX+b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Determinați valorile numerelor reale $a, b$, știind că polinomul $f$ admite rădăcinile $x_1=1$ și $x_2=2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C15.** Fie $x_1, x_2$ rădăcinile polinomului $f=X^2-X-1$. Dacă $g=X^3-2X^2-3X+1$, calculați $g(x_1)+g(x_2)$.

**C16.** Determinați toate rădăcinile reale ale ecuației $x^6-9x^3+8=0$.

**C17.** Considerăm ecuația $x^4+x^3+x^2-x-2=0$. Determinați soluțiile raționale ale acestei ecuații.

*(Variante Bac, 1999)*

**C18.** Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+a \in \mathbb{R}[X]$. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că rădăcinile $x_1, x_2, x_3$ ale polinomului verifică relația $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{1}{2}$.

*(Variante Bac, 2009)*





**C19.** Demonstrați că polinomul $f=X^{2012}-2X^{2010}+2X^4-1$ este divizibil cu polinomul $g=X^2-1$.

**C20*.** Fie polinomul $f=\hat{3}X^5+\hat{3}X^3+\hat{3}X+\hat{4} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Determinați soluțiile ecuației $f(x)=\hat{0}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C21*.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f=X^4+\hat{2}X^3+\hat{3}X^2+\hat{2}X+\hat{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$ la polinomul $g=X^2+\hat{3}X+4 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

**C22*.** Fie polinomul $f=mX^3+11X^2+8X+3 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinați $m \in \mathbb{Q}$, știind că $f(\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C23*.** Determinați restul împărțirii polinomului $f=X^{100}+2X+3 \in \mathbb{R}[X]$ la polinomul $g=X^2-X$.

**C24*.** Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f=X^{30}-3X^{20}+aX^{14}+3X^5+aX+b \in \mathbb{R}[X]$. Determinați $a$ și $b$, astfel încât $f$ să fie divizibil cu $(X-1)^2$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C25*.** Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+aX-6 \in \mathbb{R}[X]$. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că rădăcinile polinomului $f$ se află în progresie aritmetică.

**C26*.** Fie $a \in \mathbb{Z}$. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2-X-1 \in \mathbb{Z}[X]$. Demonstrați că $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C27*.** Fie polinomul $f=X^3+2X^2-5X-6 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3$. Calculați determinantul $D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_2 & x_3 & 1 \\ x_3 & x_1 & 1 \end{vmatrix}$.

**C28*.** Polinomul $f=X^4-7X^3+18X^2-22X+12$ admite rădăcina $x_1=1+i$. Determinați celelalte trei rădăcini complexe ale acestui polinom.

**C29*.** Fie $f=X^3-4X^2+aX+b \in \mathbb{R}[X]$. Determinați valorile reale ale lui $a$ și $b$ dacă polinomul admite rădăcina $x_1=i$.

**C30*.** Determinați valorile întregi ale numărului $a$, pentru care ecuația $x^3-ax^2-x+1=0$ admite cel puțin o rădăcină întreagă.

*(Variante Bac, 2009)*

### 3.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Fie $f=X^3+X^2+X+m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ dacă restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g=X-1$ este egal cu 5.

**2.** Considerăm polinoamele $f=X^4-3X^3+4X^2-2X+4$ și $g=X^2-2X+1$. Fie $r$ polinomul reprezentat de restul împărțirii lui $f$ la $g$. Demonstrați că $f(1)=r(1)$.

**3.** Se consideră polinomul $f = 2X^3 - aX^2 + 5X - 4$, având rădăcinile $x_1$, $x_2$, $x_3$. Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3$.

**4.** Considerăm polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 11X - m$, unde $m \in \mathbb{R}$. Dacă $x_1 = 3$, determinați celelalte două rădăcini ale polinomului.

**5.** Determinați toate rădăcinile reale ale ecuației $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

**6.** Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$ și $x_1$, $x_2$, $x_3$ rădăcinile sale. Demonstrați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

### Testul 2*

**1.** Determinați numere reale $a$, $b$, știind că restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 5X^2 + aX + b$ la polinomul $g = X^2 - 3x + 2$ este egal cu $4X + 3$.

**2.** Demonstrați că polinomul $f = X^{20} - X^{14} + 2X^4 - 2X^2$ este divizibil cu polinomul $g = X^3 - X$.

**3.** Demonstrați că rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 + 11X - m$ nu pot fi toate reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

**4.** Determinați toate rădăcinile complexe ale ecuației $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$.

**5.** Fie $f = X^3 - 4X + aX + b \in \mathbb{R}[X]$. Determinați valorile coeficienților $a$ și $b$, știind că polinomul admite pe $\alpha = 1$ ca rădăcină dublă.

**6.** Demonstrați că ecuația $x^3 - 4x + x + 1 = 0$ nu admite rădăcini raționale.

## 4. Probleme de sinteză – algebră

**1.** Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $2009 \circ (-2009)$.

b) Rezolvați ecuația $x \circ x^2 = 64$.

c) Demonstrați că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

*(Variante Bac, 2009)*

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 12X - m$, cu $m \in \mathbb{R}$. Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$ rădăcinile sale.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 0$.

c) Determinați valoarea numărului real $m$, știind că toate rădăcinile polinomului sunt reale.

*(Variante Bac, 2008)*





**3.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.

a) Rezolvați ecuația $\hat{2}x + \hat{6} = \hat{4}$.

b) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$, $f(x) = x^2$ nu este injectivă.

c) Calculați suma $\hat{1}^{2010} + \hat{2}^{2010} + \hat{3}^{2010} + \hat{4}^{2010} + \hat{5}^{2010} + \hat{6}^{2010} + \hat{7}^{2010}$.

**4.** Fie $m, p \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 - 6X^2 + mX - p$. Se știe că rădăcinile sale $x_1$, $x_2$, $x_3$ sunt în progresie aritmetică.

a) Demonstrați că o rădăcină este egală cu 2.

b) Pentru $p = -10$, determinați $x_1$, $x_2$, $x_3$.

c) Dacă $m > 18$, demonstrați că $f$ nu poate avea toate rădăcinile reale, pentru orice $p \in \mathbb{R}$.

**5.** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție „$\circ$" prin $x \circ y = x + y - 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2^x \circ 4^x = 5$.

b) Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = 44 + n$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x \circ x^2 \leq 1$.

*(Variante Bac, 2002)*

**6.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X(a) \mid X(a) = I_2 + aA, a \in \mathbb{R}\}$.

a) Demonstrați că $X(a)X(b) = X(a + b + ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \to G$, $f(t) = X(t - 1)$ verifică relația $f(xy) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $X(-4)X(-3)X(-2)X(-1)X(0)$.

**7.** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $5^x * 5^x = 11$.

b) Demonstrați că mulțimea $H = [3, \infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „$*$".

c) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a * b \in \mathbb{Z}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**8.** Se consideră polinomul $f = X^4 - aX^3 - aX + 1 \in \mathbb{R}[X]$. Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ rădăcinile sale.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$.

b) Pentru $a = 1$, determinați rădăcinile întregi ale polinomului $f$.

c) Determinați toate valorile întregi ale lui $a$, știind că polinomul admite cel puțin o rădăcină întreagă.

*(Variante Bac, 2009)*

**9.** Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ și matricele $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$

a) Calculați $\det(A)$.
b) Determinați cel mai mic număr natural nenul $n$, pentru care $A^n = I_2$.
c) Determinați $A^{-1}$.

**10.** Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ (-4) = -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $(-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ 2009$.

*(Variante Bac, 2009)*

**11.** Se consideră polinomul $f = (X-1)^{20} + (X-3)^{20} \in \mathbb{R}[X]$. Dacă efectuăm calculele, acesta admite forma algebrică $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{20}X^{20}$.
a) Determinați pe $a_0$.
b) Calculați valoarea expresiei $2a_0 + 4a_1 + 8a_2 + \ldots + 2^{21}a_{20}$.
c) Determinați restul împărțirii lui $f$ la polinomul $(X-2)^2$.

**12.** Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea „$*$” definită prin $x * y = xy - ax - y + 2$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că legea „$*$” este comutativă.

b) Pentru $a = 1$, demonstrați că $f(x * y) = f(x)f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $a = 1$, calculați $\frac{3}{2} * \frac{5}{3} * \frac{7}{4} * \ldots * \frac{199}{100}$.

**13.** Se consideră polinoamele $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$. Notăm cu $x_1$ și $x_2$ rădăcinile polinomului $g$.
a) Determinați restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g$.
b) Calculați $f(x_1) + f(x_2)$.
c) Determinați rădăcinile întregi ale polinomului $f$.

**14.** Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $S = \left\{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \right\}$.

a) Demonstrați că $X(a)X(b) = X(a + b + 3ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

b) Demonstrați că $[X(a)]^{-1} = X\left( -\frac{a}{1+3a} \right)$, pentru orice $a \neq \frac{1}{3}$.

c) Demonstrați că înmulțirea matricelor determină o structură de grup comutativ pe mulțimea $S$.

*(Variante Bac, 1998)*





**15.** Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+1)X^2 - 3X + 3$, unde $m \in \mathbb{Q}$.

a) Determinați $m \in \mathbb{Q}$, știind că suma rădăcinilor polinomului $f$ este egală cu 1.
b) Pentru $m = 0$, descompuneți polinomul $f$ în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.
c) Determinați $m \in \mathbb{Q}$, știind că polinomul $f$ admite rădăcina $x_1 = \sqrt{3}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**16.** Pe $(0, \infty)$ definim legea „$\perp$” prin $x \perp y = x^{\ln y}$, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

a) Calculați $9 \perp e^{\frac{1}{2}}$.
b) Demonstrați că legea „$\perp$” este asociativă.
c) Determinați $x > 2$, astfel încât $(x^2 - 1) \perp (x^2 - 4) = 1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**17.** Se consideră polinomul $f = X^{10} - 10X + 9 \in \mathbb{R}[X]$.

a) Demonstrați că acest polinom admite pe 1 ca rădăcină dublă.
b) Determinați restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g = X^2 + X$.
c) Determinați numărul rădăcinilor întregi ale polinomului $f$.

**18.** Pe $\mathbb{R}$ considerăm legea „$\otimes$” definită prin $x \otimes y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Determinați elementul neutru al legii „$\otimes$”.

b) Determinați numerele reale nenule $a$, $b$, pentru care funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = ax + b$ verifică relația $F(x \otimes y) = F(x) \cdot F(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes \ldots \otimes 10$.

**19.** Se consideră legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = x + y - 5$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Se știe că această lege este asociativă și comutativă.
a) Determinați elementul neutru al acestei legi.
b) Pentru un element $x \in \mathbb{R}$, determinați simetricul său $x'$.
c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 9$.

**20.** Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Verificați identitatea $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Determinați un număr real $a$ cu proprietatea că $x \circ a = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

*(Variante Bac, 2004)*

# 5. Primitive

## 5.1. Noțiuni teoretice

**Definiție:** Dacă $f, F: I \to \mathbb{R}$ astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$, atunci funcția $F$ este o **primitivă** a funcției $f$.

- Mulțimea primitivelor funcției $f$ se notează $\int f(x)dx$ și avem $F(x) \in \int f(x)dx$;
- Dacă există, primitivele unei funcții diferă printr-o constantă și atunci vom avea $\int f(x)dx = F(x) + C$.

**Teoremă:** Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci $f$ admite primitive.

**Consecință:** O funcție cu discontinuități de speța întâi nu admite primitive.

**Formule:**

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;
- $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;
- $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ (formula integrării prin părți);
- $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$ (formula schimbării de variabilă).

**Tabelul primitivelor uzuale:**

| Nr. | Integrala nedefinită |
|---|---|
| 1. | $\int 1\,dx = x + C$ |
| 2. | $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \in \mathbb{N}$ |
| 3. | $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,\ x > 0$ |
| 4. | $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$ |
| 5. | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ |
| 6. | $\int e^x dx = e^x + C$ |
| 7. | $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ |





| | |
|---|---|
| 8. | $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ |
| 9. | $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| 10. | $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| 11. | $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| 12. | $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ |
| 13. | $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C,\ x \neq \pm a,\ a \neq 0$ |
| 14. | $\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$ |
| 15. | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a > 0,\ x \in (-a, a)$ |
| 16. | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C,\ \lvert x\rvert > a,\ a > 0$ |
| 17. | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C,\ a \neq 0$ |
| 18. | $\int \frac{x}{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + a^2\right) + C,\ a \neq 0$ |
| 19. | $\int \frac{x}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left\lvert x^2 - a^2\right\rvert + C,\ x \neq \pm a,\ a \neq 0$ |
| 20. | $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C,\ a \neq 0$ |
| 21. | $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C,\ \lvert x\rvert > a,\ a > 0$ |
| 22. | $\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C,\ a > 0,\ x \in (-a, a)$ |

## 5.2. Probleme de inițiere

**I1.** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^5-4x^2+2x+1$ este o primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4-8x+2$.

**I2.** Calculați $\int 3x^2dx$.

**I3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}, & x<-1\\ 2+x, & x\geq -1\end{cases}$ admite primitive.

**I4.** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x$ este primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

**I5.** Calculați $\int\left(4x^3+\cos x\right)dx$.

**I6.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$. Determinați valoarea numerelor reale $a$, $b$, $c$, dacă funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^3-5x^2+6x+8$ este o primitivă a funcției $f$.

**I7.** Determinați o primitivă $F$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$, pentru care $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2014$.

**I8.** Calculați $\int\frac{x+1}{x}dx$, pentru orice $x>0$.

**I9.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-2e^x$. Calculați $\int f'(x)dx$.

**I10.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+1$ și $F$ o primitivă a sa. Demonstrați că funcția $F$ este convexă.

## 5.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2008}+2008^x$. Calculați $\int f(x)dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C2.** Determinați mulțimea primitivelor funcției $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Determinați primitivele funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=7f(x^3)-3f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

**C4.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{2x-4}, & x<2\\ x^2-3x+4, & x\geq 2\end{cases}$, admite primitive.





**C5.** Determinați numerele reale $a$, $b$, $c$, dacă funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x(ax^2+bx+c)$ este primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2+1)$.

*(Variante Bac, 2007)*

**C6.** Se consideră funcția $f:\left(\frac{1}{2},\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{2x-1}$. Calculați $\int f^2(x)dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa. Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$.

**C8.** Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Determinați o primitivă $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ cu proprietatea $F(1)=0$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C9.** Fie funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+3$ și $F(x)=ax^2+bx+c$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$. Determinați numerele $a$, $b$, $c$, știind că $F$ este primitivă a funcției $f$, iar $F(2)=8$.

*(Variante Bac, 1997)*

**C10.** Se consideră funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$. Determinați o funcție $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, știind că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C11.** Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$. Demonstrați că toate primitivele funcției $f$ sunt funcții convexe.

**C12.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. Calculați $\int(f(x)-x+1)dx$.

**C13.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$. Calculați $\int f'(x)dx$.

*(Variante Bac, 2004)*

**C14.** Se consideră funcțiile $f, g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$, $g(x)=\frac{1}{x+1}$. Calculați $\int(f(x)-g(x))dx$.

**C15.** Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, considerăm funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{x^n}$. Calculați $\int f_1(x)dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C16*.** Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, considerăm funcțiile $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$. Demonstrați că funcția $f_n$ este o primitivă a funcției $f_{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

**C17*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{3+\sin x}$. Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este strict crescătoare.

*(Variante Bac, 2006)*

**C18*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-4x+3)e^x$. Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o primitivă a funcției $f$. Determinați punctele de extrem ale funcției $F$.

**C19*.** Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$.

**C20*.** Calculați $\int\dfrac{\sqrt{x^2+4}+1}{x^2+4}dx$.

### 5.4. Teste de verificare

#### Testul 1

**1.** Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5+x\ln x$ este o primitivă a funcției $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=1+\ln x$.

**2.** Calculați $\int 2^x dx$.

**3.** Determinați o primitivă $F$ a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^3+4x$, cu proprietatea $F(1)=7$.

**4.** Calculați $\int\dfrac{x^4-1}{x^2+1}dx$.

**5.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ x^2+x+1, & x\geq 0\end{cases}$ admite primitive.

**6.** Calculați $\int\left(\dfrac{x^3+4x+1}{x^2}\right)dx$, pentru orice $x>0$.

#### Testul 2*

**1.** Calculați $\int\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

**2.** Demonstrați că orice primitivă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-2x+1$ este strict crescătoare.

**3.** Demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<3\\ x^2-1, & x\geq 3\end{cases}$ nu admite primitive.





**4.** Determinați primitivele funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}$.

**5.** Determinați toate valorile reale ale numărului real $a$, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^4+3x+5, & x\leq 1\\ ae^{x-1}, & x>1\end{cases}$ admite primitive.

**6.** Calculați $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$, unde $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

## 6. Integrala definită

### 6.1. Noțiuni teoretice

#### 6.1.1. Integrala Riemann

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă și $F$ o primitivă a sa.

**Formula Newton–Leibniz:** $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)\overset{not}{=}F(x)\Big|_a^b$

**Formule specifice integralei Riemann:**

**P1.** $\int_a^b(f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)+\int_a^b g(x)dx$;

**P2.** $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$;

**P3.** $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$;

**P4.** $\int_a^a f(x)dx=0$;

**P5.** $\int_a^c f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$;

**P6.** $\int_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)dx$ (formula integrării prin părți);

**P7.** $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$ (formula schimbării de variabilă);

**P8.** Dacă $f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

## 6.2. Probleme de inițiere

**I1.** Calculați $\int_1^3 (3x^2 + 2x + 1)dx$.

**I2.** Calculați $\int_0^\pi (\cos x + \sin x)dx$.

**I3.** Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2002} + x + 1$. Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

**I4.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$. Calculați $\int_1^2 f(\sqrt{x})dx$.

**I5.** Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$. Calculați $\int_1^e x\left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$.

**I6.** Calculați $\int_0^1 xe^x dx$.

**I7.** Calculați $\int_1^e x \ln x\,dx$.

**I8.** Calculați $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.

**I9.** Calculați $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$.

**I10.** Calculați $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$.

## 6.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3x^2+2}$. Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

**C2.** Calculați $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$.





**C3.** Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă $\int_1^a (a - 4x)dx = 6 - 5a$.

*(Variante Bac, 1999)*

**C4.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$. Demonstrați că $I_{2012} + I_{2011} = \frac{1}{2012}$.

**C5.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Calculați $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} \int_x^{x+1} f(t)dt$.

*(Variante Bac, 2001)*

**C6.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+3, x<0 \\ e^x + 2, x \ge 0 \end{cases}$. Calculați $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C7.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$. Calculați $\int_0^1 e^x f(x)dx$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C8.** Calculați:

a) $\int_0^1 (x^2 - x)e^x dx$; b) $\int_1^e (x \ln x + x)dx$; c) $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C9.** Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = a \ln x + b$ să verifice condițiile $f(1) = 2$ și $\int_1^e f(x)dx = 7$.

*(Variante Bac, 1999)*

**C10.** Calculați:

a) $\int_2^3 2x(x^2+1)^3 dx$; b) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$; c) $\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+2}dx$; d) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$.

**C11.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$. Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**C12.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$. Demonstrați că $\int_3^4 f(x)f'(x)dx = \frac{9}{2}$.

**C13.** Determinați $x > 0$, astfel încât $\int_{e^2}^x \frac{1}{t}(2\ln t - 3)dt = 0$.

*(Variante Bac, 1998)*

**C14.** Demonstrați că $\int_5^9 (x^2-2x+1)^3\,dx \geq 0$.

**C15.** Fie $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{x+1}\,dx$. Folosind eventual faptul că $e^x \geq x+1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, demonstrați că $J \geq \frac{1}{2}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C16*.** Se consideră funcțiile $f, g:(1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}$, $g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Demonstrați că $f(x)=g(x)$ pentru orice $x \in (1,\infty)$ și calculați $\int_2^3 f(x)\,dx$.

**C17*.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx>\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18*.** Folosind inegalitatea $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$, valabilă pentru orice numere reale $a, b>0$, demonstrați că $\int_0^1 \sqrt{xe^x}\,dx \leq \frac{e}{2}-\frac{1}{4}$.

**C19*.** Calculați $\int_0^3 \sqrt{x^2+16}\,dx$.

**C20*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+e^{-x}$. Știind că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, demonstrați că $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq \frac{2}{3}$.

*(Variante Bac, 2009)*

### 6.4. Teste de verificare

Testul 1

**1.** Calculați $\int_2^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$.

**2.** Se consideră integralele $I_n=\int_2^3 \frac{x^n}{x^2-1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că $I_{2010}-I_{2008}=\frac{3^{2009}-2^{2009}}{2009}$.





**3.** Calculați $\int_1^3 (2x+1)(x^2+x)\,dx$.

**4.** Calculați $\int_1^2 (x+5)e^x\,dx$.

**5.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Calculați $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)\,dt$.

**6.** Considerăm integrala $I=\int_1^2 (m^2+(4-4m)x+4x^3)\,dx$, $m \in \mathbb{R}$. Determinați $m$, dacă $I \leq 12$.

Testul 2*

**1.** Calculați $\int_0^1 (2002^x+2002^{-x})\,dx$.

**2.** Determinați $a>0$, dacă $\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx=a$.

**3.** Fie $I_n=\int_0^1 \frac{x^n+1}{x+1}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind eventual faptul că $0\leq x^2\leq x$, pentru orice $x \in [0,1]$, arătați că $I_3 \leq I_2$.

**4.** Calculați $\int_0^1 (x^2-4x+3)e^x\,dx$.

**5.** Calculați $\int_0^{\pi/2} \cos x\cdot\sin^3 x\,dx$.

**6.** Calculați $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$.

## 7. Aplicații ale integralei definite

### 7.1. Noțiuni teoretice

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.

Aria suprafeței mărginite de axa $Ox$, graficul funcției $f$ și dreptele verticale de ecuație $x=a$ și $x=b$ este egală cu:

$\mathcal{A}_f=\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$ este egal cu:

$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

## 7.2. Probleme de inițiere

**I1.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$, respectiv $x = 1$.

**I2.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$, respectiv $x = 3$.

**I3.** Fie $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$, respectiv $x = \frac{\pi}{4}$.

**I4.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^4$. Determinați valoarea numărului real pozitiv $a$, știind că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$, respectiv $x = 5$ este egală cu 625.

**I5.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$. Folosind, eventual, inegalitatea $e^x - 1 \geq x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$, respectiv $x = 5$ este mai mare sau egală cu 12.

**I6.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x}$.

**I7.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

**I8.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

**I9.** Determinați toate valorile reale ale numărului $m$ pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx$ este egală cu $21\pi$.

**I10.** Folosind, eventual, inegalitatea $\sin x \leq x$, valabilă pentru orice $x \geq 0$, demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este mai mic sau egal decât $\frac{\pi}{3}$.





## 7.3. Probleme de consolidare

**C1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 + 2$. Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$, respectiv $x = 2$.

**C2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$, respectiv $x = 1$.

**C3.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C4.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}(x + 1)$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.

*(Variante Bac, 1999)*

**C5.** Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - 2^x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele $x = 0$ și $x = 1$.

*(Variante Bac, 2005)*

**C6.** Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. Determinați valoarea numărului real pozitiv $a$, dacă aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 2$ este egală cu 14.

**C7.** Fie funcția $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + 3x + 4x^2}{x}$. Calculați aria suprafeței plane limitate de graficul funcției $f$ și axa $Ox$.

*(Variante Bac, 1999)*

**C8.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^4$. Determinați valoarea numărului $a \in (1, \infty)$, știind că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$, dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = a$ este egală cu 31.

**C9.** Folosind, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între axa $Ox$, dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 2$ și graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ este mai mare sau egală cu $\frac{5}{2}$.

**C10.** Determinați volumul corpului de rotație obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{4x^3 + 3x^2}$.

**C11.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f: [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - 1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C12.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x+1}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C13.** Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[1,e]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

**C14.** Se consideră funcția $f:[0,a], f(x)=x^2\sqrt{5}$, unde $a>0$. Determinați valoarea numărului $a$, știind că volumul corpului obținut prin rotația graficului lui $f$ în jurul axei $Ox$ este egal cu $32\pi$.

**C15.** Pentru orice $n\in\mathbb{N}$, se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, f_n(x)=e^{x^n}$. Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=xf_3(x)$.

**C16*.** Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+1$. Fie $m>-1$. Determinați valoarea minimă a ariei suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=m$ și $x=m+1$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C17*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^{2008}+4}$. Demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$, dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$ este un număr real cuprins în intervalul $\left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right]$.

*(Variante Bac, 2009)*

**C18*.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+4x-3$. Determinați $a\in(1,3)$ cu proprietatea că dreapta $x=a$ împarte suprafața plană cuprinsă între graficul funcției $f$ și axa $Ox$ în două regiuni de arii egale.

*(Variante Bac, 2001)*

**C19*.** Determinați numărul real $a$, astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=ax+2$ să fie minim.

*(Variante Bac, 2009)*

**C20*.** Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x}{x+1}$. Știind că $x+1\geq 1$, pentru orice $x\in[0,1]$, demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația graficului $f$ în jurul axei $Ox$ este mai mic sau egal cu $\frac{\pi}{3}$.

*(Variante Bac, 1990)*





## 7.4. Teste de verificare

### Testul 1

**1.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=6x^5+4x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=1$, respectiv $x=2$.

**2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ae^{2x}$. Determinați valoarea numărului pozitiv $a$, pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$, respectiv $x=1$ este egală cu $2e^2-2$.

**3.** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln^2 x$. Folosind, eventual, inegalitatea $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\geq 1$, demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=1$, respectiv $x=4$ este mai mică sau egală cu 9.

**4.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

**5.** Determinați valoarea numărului real $a\in(0,\infty)$, pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[0,a]\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x}$ este egal cu $4\pi$.

**6.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\ln x}$.

### Testul 2*

**1.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x\sin x$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$, respectiv $x=\frac{\pi}{2}$.

**2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\sqrt{x^3+1}$. Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$, respectiv $x=\sqrt[3]{8}$.

**3.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3a^2x^2+2$. Determinați toate valorile reale ale numărului $a$, știind că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=2$, respectiv $x=3$ este egală cu 21.

**4.** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

**5.** Fie $f:[1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3x^2+1}$. Determinați valoarea numărului $a\in(1,3)$, pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu o jumătate din volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f$.

**6.** Folosind, eventual, inegalitatea $\sqrt[3]{x}\le\dfrac{x+2}{3}$, valabilă pentru orice $x>0$, demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f:[2013,2014]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ este mai mic sau egal cu volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[2013,2014]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3}}$.

## 8. Probleme de sinteză – analiză matematică

**1.** Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2e^x$, $F(x)=(x^2+1)e^x$.

a) Demonstrați că $F$ este o primitivă a lui $f$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

c) Demonstrați că orice primitivă a funcției $F$ este convexă.

**2.** Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^n}{x+1}$.

a) Calculați $\int(x+1)f_2(x)dx$.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f_1$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=1$.

c) Folosind eventual inegalitatea $x^n\le 1$, valabilă pentru orice $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}$, demonstrați că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx\le\ln 2$.

*(Variante Bac, 2008)*





**3.** Se consideră funcția $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Calculați $\int_1^4 f(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(e^{2x})dx$.

c) Folosind eventual inegalitatea $\ln(1+t)\le t$, valabilă pentru orice $t>0$, demonstrați că $\int_1^4\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx\le\dfrac{14}{3}$.

**4.** Se consideră funcția $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului lui $f$ în jurul axei $Ox$.

b) Calculați $\int_1^2 xf(x)dx$.

c) Calculați $\int_1^2 e^x f^2(x)dx$.

**5.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2007}+x+1$.

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $h:[1,3]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x^{2007}-1$.

b) Determinați o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lui $f$ care verifică condiția $F(0)=1$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^{20008}}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**6.** Fie $f_n:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln^n x$, unde $n\in\mathbb{N}^*$. Notăm $I_n=\int_1^e f_n(x)dx$.

a) Calculați $\int_e^{e^2}\dfrac{f_3(x)}{\ln^3 x}dx$.

b) Calculați $I_1$.

c) Demonstrați că $I_{2008}\le I_{2007}$.

**7.** Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției în jurul axei $Ox$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c) Știind că $\sqrt{x^2+1} \le \sqrt{2}$, pentru orice $x \in [0, 1]$, demonstrați că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele $x = 0$, $x = 1$ este mai mică decât $\frac{3}{2}$.

*(Variante Bac, 2008)*

**8.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se consideră $I_n = \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^2+1}$.

a) Calculați $I_2$.
b) Calculați $I_6 - I_2$.
c) Demonstrați că $I_{2012} \le I_{2011}$.

**9.** Se consideră funcțiile $F, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = xe^x$, $f(x) = (x+1)e^x$.

a) Demonstrați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.
b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = 2$.
c) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)-F(x)}{1+e^x}\,dx$.

*(Variante Bac, 2008)*

**10.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x-2}+1, & x < 2 \\ 3x^2 - 2x - 6, & x \ge 2 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_2^3 f(x)dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

**11.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Demonstrați că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx = e - 1$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

c) Demonstrați că $1 \le \int_0^1 f(x)dx \le e$.

*(Variante Bac, 2008)*





**12.** Se consideră funcția $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^2 - 2mx + m^2$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $\int_1^2 f_1(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 e^x f_0(x)dx$.

c) Determinați valoarea numărului real $m$, știind că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f_m$, axa $Ox$, dreptele $x = 0$ și $x = 1$ este minimă.

**13.** Se consideră funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a = ax + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea numărului real $a$, știind că funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ este o primitivă a funcției $f_a$.

b) Calculați $\int_1^3 f_2(x)dx$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f_a^2(x)dx \ge \frac{1}{4}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

*(Variante Bac, 2009)*

**14.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $f_2$.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f_{2008}(x)dx \ge \int_0^1 f_{2009}(x)dx$.

*(Variante Bac, 2009)*

**15.** Se consideră funcția $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este convexă pe $(1, \infty)$.

b) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

c) Calculați $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)dt$.

**16.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = xe^{nx}$.

a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

b) Demonstrați că orice primitivă a funcției $f_3$ admite un singur punct de inflexiune.

c) Folosind eventual inegalitatea $e^{3x} \geq 3x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, demonstrați că $\int_0^1 f_3(x)dx \geq \frac{3}{2}$.

**17.** Fie funcția $f:[1, e] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Calculați $\int f'(x)dx$.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = e$.

c) Demonstrați că $\int_1^e e^x f(x)dx \leq e^e - e$.

*(Variante Bac, 2009)*

**18.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 - 1, & x < 1 \\ x^2 - 2x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ și $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă oarecare a funcției $f$.

a) Demonstrați că funcția $F$ este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

b) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[-1, 0] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

**19.** Se consideră funcțiile $f, g:[0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{1-x}$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $g$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f$.

c) Demonstrați că $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))dx \geq 0$.

*(Variante Bac, 2009)*

**20.** Se consideră funcția $f:(1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x^2 + x - 2}$.

a) Demonstrați că $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}$.

b) Calculați $\int_2^3 f(x)dx$.

c) Folosind eventual faptul că $x^2 + x - 2 \geq 28$, pentru orice $x \geq 5$, demonstrați că $\int_5^6 f(x)dx \leq \frac{3}{28}$.



# Teste pentru Bacalaureat 2015, după modelul M.E.N.

## 1. Subiecte propuse la proba de matematică a examenului de Bacalaureat în perioada 2009-2014

### Testul 1*

Bacalaureat, model M.E.N., 2014. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii.

#### Subiectul I

**1.** Determinați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termeni reali, știind că $b_2 = 1$ și $b_5 = 8$.

**2.** Calculați $(f \circ f)(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 7$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_5(x-3) = \log_5(x-1)$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$, acesta să fie divizibil cu 11.

**5.** Determinați numărul real $a$ pentru care vectorii $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

**6.** Rezolvați în mulțimea $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ecuația $2\sin x - 1 = 0$.

#### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Verificați dacă $\det(A + B) > \det A + \det B$.

c) Determinați numărul matricelor $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ pentru care $X^2 = A$, unde $a$ și $b$ sunt numere reale.

**2.** Se consideră $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X + a$, unde $a$ este număr real.

a) Pentru $a = -2$, arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați numărul real $a$, știind că $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 2$.

c) Pentru $a \neq 0$, determinați un polinom de grad trei, având coeficienți reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ și $\frac{1}{x_3}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.
b) Arătați că funcția $f$ este descrescătoare.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+2}$.

a) Calculați $\int_0^1 (x+2)f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=1$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției:

$g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$.

## Testul 2

Bacalaureat, model M.E.N., 2014. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}$ este natural.

**2.** Calculați $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(x^2+8)=\log_7(6x)$.

**4.** După o scumpire cu 30%, prețul unui obiect este 325 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $P(1,3)$ și $R(3,3)$. Determinați coordonatele punctului $Q$, știind că $R$ este mijlocul segmentului $PQ$.

**6.** Arătați că $\sin 10^\circ+\sin 30^\circ-\sin 170^\circ=\frac{1}{2}$.





### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.

b) Arătați că $B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det(A+xB)=0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

a) Arătați că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice număr real $x$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

c) Calculați $1\circ 2\circ\ldots\circ 2014$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției $f$.

c) Demonstrați că $e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2\left(3-f(x)\right)dx$.

b) Determinați primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=3$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

## Testul 3*

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2014. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii.

### Subiectul I

**1.** Se consideră numărul complex $z=2+3i$. Calculați $z^2$.

**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa $Ox$ a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2+5)=1$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ și $C(0, 3)$. Calculați aria triunghiului $ABC$.

**6.** Se consideră $E(x)=\cos x+\sin\frac{x}{2}$, unde $x$ este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a+1 & 1\\ 1-a & 2\end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

a) Calculați $\det(A(1))$.

b) Determinați numărul real $a$, știind că $\det(A(a))=1$.

c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3x-3y+6$.

a) Calculați $1\circ 2$.

b) Arătați că $x\circ y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$ pentru orice numere reale $x$ și $y$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=2$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(-\infty, 2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^{-x}}{x-2}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x\in(-\infty, 2)$.

c) Arătați că $f(x)\le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(-\infty, 2)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_1^2 (x+1)f(x)dx=2\ln 2-1$.

b) Arătați că $\int_1^e \left(f(x)+(x+1)f'(x)\right)dx=1$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[2, 3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{f(x)}$.





# Testul 4

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2014. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

**1.** Arătați că $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.

**2.** Determinați numărul real $m$, știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+1}=1$.

**4.** În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(2, 6)$ și $C(5, 2)$. Arătați că triunghiul $ABC$ este dreptunghic.

**6.** Arătați că $\operatorname{tg}^2 60^\circ+\operatorname{tg}^2 45^\circ=4$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\det A=-1$.

b) Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c) Determinați numărul real $x$, știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2(x+y-1)-xy$.

a) Arătați că $1*2=2$.

b) Arătați că $x*2=2*x=2$ pentru orice număr real $x$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

b) Arătați că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real $x$.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=0$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

a) Arătați că $\int_1^2 3x^2dx=7$.

b) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ pentru care $F(1)=2014$.

c) Determinați numărul natural $n$, $n\geq 2$, știind că $\int \frac{f(x)}{x}dx=\frac{13}{2}$.

## Testul 5*

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2014. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii.

### Subiectul I

**1.** Determinați partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.

**2.** Arătați că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ știind că $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+10=0$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.

**4.** Determinați câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1, 2, 3\}$.

**5.** Determinați numărul real $a$ pentru care dreptele de ecuații $y=(a-1)x+1$ și $y=2x-3$ sunt paralele.

**6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului $ABC$ în care $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

a) Calculați $\det(A(2))$.

b) Determinați numărul real $x$ pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Arătați că $(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul $n$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.

a) Calculați $2*4$.

b) Arătați că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale $x$ și $y$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=x$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$.

b) Arătați că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

c) Arătați că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.





**2.** Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+8x+15}$.

a) Arătați că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=2014$.

b) Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)dx=-\frac{1}{144}$.

c) Determinați numărul real $a$, $a>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=a$ are aria egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$.

## Testul 6

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2014. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10$.

**2.** Determinați numărul real $a$ știind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+1)=\log_2 5$.

**4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2, 5)$ și $B(3, 5)$. Calculați distanța de la punctul $A$ la punctul $B$.

**6.** Arătați că $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\frac{3}{4}$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

a) Arătați că $\det A=0$.

b) Determinați numărul real $x$ știind că $B+C=A$.

c) Arătați că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

a) Arătați că $0\circ(-4)=-4$.

b) Arătați că $x \circ y = (x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale $x$ și $y$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

a) Arătați că $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

b) Arătați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

c) Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

## Testul 7*

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2014 – subiect de rezervă. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii.

### Subiectul I

**1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Calculați $z^2$.

**2.** Determinați numărul real $m$ știind că punctul $M(m,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-3)=2$.

**4.** Determinați numărul submulțimilor cu număr impar de elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4\}$.

**5.** În dreptunghiul $ABCD$ se notează cu $M$ mijlocul laturii $AD$. Arătați că $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$.

**6.** Se consideră triunghiul $ABC$ dreptunghic în $A$. Arătați că $\sin B\cdot\cos C+\sin C\cdot\cos B=1$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.





b) Arătați că $A+A\cdot A=2014I_2$.

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $A\cdot X=2014\cdot I_2$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3-6X^2+mX-6$, unde $m$ este număr real.

a) Calculați $f(0)$.

b) Arătați că $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=1$ știind că $x_1$, $x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

c) Determinați numărul real $m$ știind că rădăcinile polinomului $f$ sunt trei numere întregi consecutive.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției $f$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln 2$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este concavă pe intervalul $(-1,+\infty)$.

c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria mai mare sau egală cu $\ln 4$, pentru orice număr natural nenul $n$.

## Testul 8

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2014 – subiect de rezervă. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$.

**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ cu axa $Oy$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1}=9$.

4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor reale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.
5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 1)$ și $C(4, 4)$. Arătați că $AB = BC$.
6. Determinați aria triunghiului $ABC$ dreptunghic în $A$ știind că $AB = 6$ și $BC = 10$.

### Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
   a) Arătați că $\det A = 0$.
   b) Arătați că $A \cdot A = 5A$.
   c) Determinați numerele reale $x$ și $y$ pentru care $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy$.
   a) Arătați că $(-1) \circ 1 = -1$.
   b) Arătați că $x \circ y = (x + 1)(y + 1) - 1$ pentru orice numere reale $x$ și $y$.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x + 1) \circ (x - 3) = 4$.

### Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.
   a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2$.
   b) Arătați că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
   c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 3$, situat pe graficul funcției $f$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.
   a) Arătați că $\int_{-1}^{1}(2x+1)dx=2$.
   b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.
   c) Demonstrați că orice primitivă a funcției $f$ este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.





## Testul 9*

Bacalaureat, sesiunea de toamnă, 2014. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii.

### Subiectul I

1. Determinați numărul real $x$ pentru care numerele 2, $x + 2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2-2x)=3$.
4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.
5. Determinați numărul real $a$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuși.
6. Calculați cosinusul unghiului $A$ al triunghiului $ABC$ în care $AB = 4$, $AC = 5$ și $BC = 6$.

### Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   a) Calculați $\det B$.
   b) Arătați că $AB = BA$.
   c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det(B + xA) = 1$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se folosește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4(x + y - 5)$.
   a) Calculați $4 * 5$.
   b) Arătați că $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ pentru orice numere reale $x$ și $y$.
   c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2014$.

### Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2+3}$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Arătați că $f'(x)=\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   c) Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(-1, 1)$.
2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.
   a) Arătați că $\int_{1}^{e} f(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

b) Arătați că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx = \frac{3e^4+1}{16}$.

c) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

## Testul 10

Bacalaureat, sesiunea de toamnă, 2014. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Pentru $a = 3$, arătați că $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{5}{6}$.

**2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+5} = 3$.

**4.** Prețul unei imprimante este 120 de lei. Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%.

**5.** În sistemul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(2, 5)$ și $C(6, 5)$. Determinați perimetrul triunghiului $ABC$.

**6.** Calculați $\cos A$, știind că $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și unghiul $A$ este ascuțit.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde $b$ este număr real.

a) Arătați că $\det A = -2$.

b) Determinați numărul real $b$ pentru care $A + B = AB + C$.

c) Arătați că $\det(B + 2C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real $b$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f$ prin $X - 1$.

c) Arătați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -2$, știind că $x_1$, $x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \ln x$.

a) Arătați că $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.





b) Arătați că $f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

c) Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

b) Determinați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

c) Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este funcție crescătoare pe intervalul $(-1, +\infty)$.

## Testul 11

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2013. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right) - \sqrt{28}$ este natural.

**2.** Calculați $f(1) + f(2) + \ldots + f(10)$ pentru funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x-1} = 16$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$, acesta să fie multiplu de 7.

**5.** Se consideră punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

**6.** Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\frac{3\sin x - 2\cos x}{\cos x} = 1$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru fiecare număr real $x$, se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(2))$.

b) Arătați că $A(1) \cdot A(2) = 5A(1)$.

c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $\det(A(x)) = 0$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$, unde $m$ este număr real.

a) Pentru $m = 3$, calculați $f(1)$.

b) Determinați numărul real $m$, știind că restul împărțirii polinomului $f$ la $X - 2$ este egal cu 2.

c) Pentru $m=4$, arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

c) Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

b) Calculați $\int_0^1 xf'(x)dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}, h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

## Testul 12

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2013. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6$.

**2.** Calculați $f(-2)\cdot f(0)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x+1$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2+1)=\log_3 1$.

**4.** Prețul unui obiect este 1000 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 10%.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $P(2,1)$ și $R(2,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului $PR$.

**6.** Calculați $\cos B$, știind că $\sin B=\frac{5}{13}$ și unghiul $B$ este ascuțit.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.





b) Determinați numărul real $x$ pentru care $A\cdot A-xI_2=A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Determinați matricele $M=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}$, știind că $\det(M+a)=0$, unde $m$ este număr real.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=x+y-2$.

a) Calculați $5*(-5)$.

b) Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

c) Calculați $(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=xe^x$.

a) Arătați că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Verificați dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătați că funcția $f$ are un punct de extrem.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_4^5 xf'(x)dx$.

b) Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcției $f$.

c) Determinați numărul real $a$, $a>5$, pentru care aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=5$ și $x=a$ este egală cu $\ln 3$.

## Testul 13

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2013. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.

**2.** Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-2$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+1}=x+1$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.

**5.** Se consideră punctele $A$, $B$ și $C$, astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

**6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde $x$ este număr real. Calculați $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Arătați că $A^2-6A=I_2$.
c) Determinați inversa matricei $B=A-6I_2$.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

a) Calculați $2*2$.
b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=\sqrt{12}$.
c) Arătați că numărul $\underbrace{1*1*\ldots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}$ este întreg.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x(x^2-6x+9)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Verificați dacă $f(x)+f''(x)=2(f'(x)+e^x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 (x+1)f(x)dx$.

b) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)dx+\int_0^1 x^3 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

## Testul 14

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2013. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.

**2.** Calculați $f(0)\cdot f(2)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$.





**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x-2}=25$.

**4.** Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(1,3)$. Calculați distanța de la punctul $A$ la punctul $B$.

**6.** Calculați $\cos 45^\circ+\cos 135^\circ$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru fiecare număr real $a$ se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=M(0)$.

b) Determinați numărul real $a$ pentru care $\det(M(a))=0$.
c) Determinați matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+1$.

a) Arătați că $f(1)=0$.
b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g=X^2-2X+1$.
c) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:[0,+\infty), f(x)=\sqrt{x}-1$.

a) Arătați că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Verificați dacă dreapta de ecuație $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcției $f$.
c) Arătați că funcția $f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=e^x\cdot\sqrt{x+1}$.

a) Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

b) Calculați $\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)dx$.

c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

# Testul 15

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2013 – subiect de rezervă. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $\sqrt{8}-2\left(\sqrt{2}-3\right)$ este natural.

**2.** Calculați $(f\circ f)(0)$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x+1$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+1)=\log_2 5$.

**4.** După o ieftinire cu 20%, prețul unui produs scade cu 200 de lei. Calculați prețul produsului după ieftinire.

**5.** Determinați numărul real $a$ pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-4\vec{j}$ sunt opuși.

**6.** Calculați lungimea medianei din $A$ în triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC=10$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul de ecuații liniare $\begin{cases}x-y+2z=a\\2x-y=0\\y-z=1\end{cases}$, unde $a$ este un număr real.

a) Determinați numărul real $a$, știind că $(x, y, z)=(1, 2, 1)$ este soluție a sistemului.
b) Calculați determinantul matricei sistemului.
c) Rezolvați sistemul pentru $a=-2$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3-X+a$, unde $a$ este număr întreg.

a) Pentru $a=-2$, calculați $f(2)$.
b) Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=2$, unde $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.
c) Arătați că, dacă polinomul $f$ are o rădăcină întreagă, atunci $a$ este multiplu de 6.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty), f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
b) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.
c) Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(0, 4)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

a) Arătați că $\int_2^4 (x-1)f(x)dx=\ln\frac{5}{3}$.





b) Calculați $\int_2^3 (x^3-1)f(x)dx$.

c) Arătați că aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x=2$ și $x=3$ este egală cu $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

# Testul 16

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2013 – subiect de rezervă. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

**1.** Arătați că $2\left(5-\sqrt{2}\right)+2\sqrt{2}=10$.

**2.** Calculați $f(-3)+f(3)$ pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-9$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x}=25$.

**4.** Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 1)$ și $B(3, 1)$. Calculați distanța de la punctul $A$ la punctul $B$.

**6.** Calculați $\cos 30^\circ+\cos 150^\circ$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x&-1\\0&x\end{pmatrix}$, unde $x$ este număr real.

a) Calculați $\det A$.
b) Pentru $x=0$, arătați că $A-B=I_2$.
c) Determinați numărul real $x$ pentru care $\det(A+B)=0$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=x+y+3$.

a) Calculați $2\circ(-2)$.
b) Arătați că $e=-3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
c) Determinați numărul real $x$ pentru care $2013\circ(-2013)=x\circ x$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Arătați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 1$.

a) Calculați $\int_2^4 f'(x)dx$.

b) Arătați că funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^3 + x + 1$ este o primitivă a funcției $f$.

c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

## Testul 17*

Bacalaureat, sesiunea de toamnă, 2013. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $a = 3(2 + 5i) - 5(1 + 3i)$ este real.

**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție cu axa $Ox$ a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 10x + 25$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 + x + 1) = \log_5(x + 2)$.

**4.** După o ieftinire cu 10%, prețul unui produs este 90 de lei. Calculați prețul produsului înainte de ieftinire.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră dreapta $h$ de ecuație $y = x - 1$ și punctul $A(2, 2)$. Determinați ecuația dreptei $d$ care trece prin $A$ și este paralelă cu $h$.

**6.** Calculați cosinusul unghiului $A$ al triunghiului $ABC$ în care $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 7$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru fiecare număr real $x$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A(2) + A(6) = 2A(4)$.

b) Determinați numărul real $x$ pentru care $\det(A(x)) = 0$.

c) Determinați inversa matricei $A(2)$.

**2.** Se consideră $x_1$, $x_2$ și $x_3$ rădăcinile complexe ale polinomului $f = X^3 + X^2 + mX + m$, unde $m$ este un număr real.

a) Arătați că $f$ este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real $m$.

b) Determinați numărul real $m$ pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

c) Determinați valorile reale ale lui $m$, știind că $|x_1| = |x_2| = |x_3|$.





### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty)$, $f(x) = x - \ln x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției $f$.

c) Demonstrați că $x \geq \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x + 1)(x - 1)$.

a) Arătați că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}\,dx = \frac{7}{2}$.

b) Determinați primitiva $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funcției $f$, știind că $F(1) = -1$.

c) Arătați că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2 - 1}\,dx = \frac{e^2}{4} - 2\ln 2 + 1$.

## Testul 18

Bacalaureat, sesiunea de toamnă, 2013. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $3\left(4 - \sqrt{3}\right) + 3\sqrt{3} = 12$.

**2.** Calculați $f(-4) + f(4)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 16$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x - 2)^2 - x^2 + 8 = 0$.

**4.** Prețul unui obiect este 100 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2, 4)$ și $B(2, 1)$. Calculați distanța de la punctul $A$ la punctul $B$.

**6.** Calculați $\cos A$, știind că $\sin A = \frac{1}{2}$ și unghiul $A$ este ascuțit.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde $b$ este număr real.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați numărul real $b$ pentru care $A \cdot B = 2I_2$.

c) Determinați numărul real $b$ pentru care $\det(A + B) = 0$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f$ la $X - 2$.

c) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde $x_1, x_2, x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 2)^3$.

a) Verificați dacă $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{x^2}$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

a) Verificați dacă funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$ este o primitivă a funcției $f$.

b) Calculați aria suprafeței plane determinate de graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 1$.

c) Arătați că $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x}\,dx = \dfrac{3}{2} + \ln 2$.

## Testul 19*

Model propus de MEN, septembrie 2012. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 1$.

**2.** Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care $x^2 - 2x - m > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_2 x + \log_2(x - 1) = \log_2 12$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr real de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

**5.** Calculați $\vec{a} \cdot \vec{b}$, știind că $|\vec{a}| = 2$ și $|\vec{b}| = 3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\dfrac{\pi}{3}$.

**6.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 3)$, $B(0, 1)$ și $C(3, 1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului $ABC$.





### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru $n$ număr natural se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați suma elementelor matricei $A$.

b) Determinați numerele naturale $n$ pentru care matricea $A$ are determinantul diferit de zero.

c) În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0, 0)$ și $A_n(2n + 1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați valorile numărului natural $n$, $n \geq 2$, pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu $n^2 - 3$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x \circ y = x + ay + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $a = 1$, calculați $2011 \circ 2012$.

b) Determinați numărul real $a$, pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

c) Pentru $a = -1$, rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \circ 2^x = 1$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + \ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \dfrac{3}{2}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 1$.

c) Demonstrați că funcția $f$ este concavă pe $(0, +\infty)$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = (x + n)e^x$.

a) Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

b) Arătați că funcția $f_{2011}$ este o primitivă a funcției $f_{2012}$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geq \dfrac{9n + 5}{6}$, pentru orice număr natural nenul $n$, folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

## Testul 20

Model propus de M.E.N., septembrie 2012. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x + 2)^2 = 4$.

**2.** Determinați numărul real $m$ pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}=9$.

**4.** Calculați $5C_4^2-A_5^2$.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-6, 3)$ și $B(2, 5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului $(AB)$.

**6.** Calculați lungimea diagonalei $BD$ a rombului $ABCD$ în care $AB=4$ și $m(\sphericalangle ABC)=120°$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Pentru fiecare număr real $x$ se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & -1 & x\\ x & x & 2\end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.

a) Calculați $\Delta(1)$.

b) Arătați că $\Delta(x)=6(x^2-1)$, pentru orice număr real $x$.

c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

**2.** În $\mathbb{R}[X]$, considerăm polinoamele $f=X^3-X^2+aX+b$.

a) Calculați $a+b$, știind că $f(1)=0$.

b) Pentru $a=-1$ și $b=1$, determinați rădăcinile polinomului $f$.

c) Determinați numerele reale $a$ și $b$, știind că $x_1=1$ și $x_2=2$ sunt rădăcini ale polinomului $f$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

a) Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$.

c) Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

a) Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției $f$.

b) Calculați $\int_0^c x\cdot f(x^2)dx$.

c) Determinați numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.





# Testul 21

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 2012. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ se cunosc $a_4=7$ și $a_9=22$. Calculați $a_{14}$.

**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5-x$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x}=\frac{1}{4}$.

**4.** Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0, 1, 2, 3\}$.

**5.** Într-un reper cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 2)$ și $B(3, 0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului $A$ față de punctul $B$.

**6.** Calculați lungimea laturii $BC$ a triunghiului $ABC$, știind că $AB=6$, $AC=5$ și $m(\sphericalangle BAC)=60°$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-y+z=1\\ x+y+az=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei asociate sistemului.

b) Determinați valorile reale ale lui $a$ pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.

c) Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-1$.

a) Arătați că $x*1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=4$.

c) Determinați numărul natural $n$, $n\geq2$, pentru care $C_n^1*C_n^2=14$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

a) Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția $f$ este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x$.

a) Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției $f$ care verifică relația $F(0)=1$.

b) Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei $Ox$, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^{2012}-x^{2011}$.

## Testul 22

Bacalaureat, sesiunea de vară, 2012. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0{,}75$.

**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\dfrac{2}{x-3}<0$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.

**4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați $p$, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului $B$, știind că $A$ este mijlocul segmentului $(OB)$.

**6.** Determinați măsura $x$ a unui unghi ascuțit, știind că $\dfrac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

a) Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați numărul real $a$, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

c) Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

**2.** În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile $x_1$, $x_2$ și $x_3$.

a) Arătați că polinomul $f$ se divide cu $X-1$.





b) Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

c) Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

a) Arătați că $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

b) Demonstrați că funcția $f$ este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției $f$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^e f(\ln x)dx$.

c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$.

## Testul 23

Bacalaureat, sesiunea de vară – subiect de rezervă, 2012. Filiera teoretică, profilul real: specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}$, $2\sqrt{2}$ și 3.

**2.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}$.

**3.** Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)$, $f(x)=\log_2(x+1)$ și $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$, $g(x)=2^x-1$. Calculați $f(g(1))$.

**4.** Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $O(0,0)$, $A(5,1)$, $B(3,5)$. Calculați lungimea medianei din vârful $O$ în triunghiul $OAB$.

**6.** Se consideră triunghiul $MNP$ cu $MP=6$, $\sin N=\dfrac{3}{5}$ și $\sin P=\dfrac{4}{5}$. Calculați lungimea laturii $(MN)$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.

b) Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.

c) Pentru $m=1$, arătați că $y_1^2 = x_1 \cdot z_1$, unde $(x_1, y_1, z_1)$ este soluția sistemului.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m=0$, calculați restul împărțirii polinomului $f$ la $X-1$.

b) Arătați că polinomul $f$ este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real $m$.

c) Determinați valorile reale ale lui $m$ pentru care polinomul $f$ are trei rădăcini reale.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{10x}{(x^2+2)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

c) Demonstrați că $-\dfrac{1}{2} \le f(x) \le \dfrac{1}{3}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

**2.** Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră numărul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,dx$.

a) Calculați $I_1$.

b) Arătați că $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că $\dfrac{1}{4026} \le I_{2012} \le \dfrac{1}{2013}$.

# Testul 24

Bacalaureat, sesiunea de toamnă, 2012. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

**1.** Se consideră numărul $a = \log_3 2$. Arătați că $\log_3 6 = 1 + a$.

**2.** Determinați numărul real $m$, știind că punctul $A(0, 1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + m - 3$.





**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1) - \log_2(x+3) = -1$.

**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctul $A(4, -1)$. Determinați coordonatele punctului $B$, știind că $O$ este mijlocul segmentului $(AB)$.

**6.** Calculați cosinusul unghiului $A$ al triunghiului $ABC$, știind că $AB = 5$, $AC = 6$ și $BC = 7$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+ay+3z=1 \\ 4x+a^2y+9z=1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$, și se notează cu $A$ matricea sistemului.

a) Arătați că $\det A = -a^2 + 5a - 6$.

b) Determinați valorile reale ale numărului $a$ pentru care matricea $A$ este inversabilă.

c) Pentru $a=1$, rezolvați sistemul.

**2.** În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = mX^5 + nX$, cu $m, n \in \mathbb{Z}_5$.

a) Determinați $n \in \mathbb{Z}_5$ pentru care $f(\hat{1}) = m$.

b) Pentru $m = \hat{1}$ și $n = \hat{4}$, determinați rădăcinile din $\mathbb{Z}_5$ ale polinomului $f$.

c) Arătați că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$.

a) Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)\cdot \ln x}{x^2-x-1}$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = e^x \cdot \sqrt{x+1}$.

a) Determinați primitivele funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}}$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)\,dx$.

c) Calculați aria suprafeței determinate de graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, h(x) = e^{-x}\cdot f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=2$ și $x=3$.

## Testul 25

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 8 iunie 2011. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Comparați numerele $a = \log_2 4$ și $b = \sqrt[3]{27}$.

**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $3x^2 - 11x + 6 \le 0$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+x+1} = 3^{5x-2}$.

**4.** Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 15$.

**5.** Determinați numerele reale $m$, pentru care punctul $A_m(2m-1, m^2)$ se află pe dreapta $d: x - y + 1 = 0$.

**6.** Calculați $\cos x$, știind că $0° < x < 90°$ și $\sin x = \frac{12}{13}$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Determinați numerele naturale $m$ și $n$ pentru care matricea $\begin{pmatrix} 4 & m^2 \\ 9 & n^2 \end{pmatrix} \in G$.

b) Arătați că, dacă $U, V \in G$, atunci $U \cdot V \in G$.

c) Calculați suma elementelor matricei $U \in G$, știind că suma elementelor matricei $U^2$ este egală cu 8.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 2X + 4$.

a) Arătați că restul împărțirii polinomului $f$ prin polinomul $g = X - \sqrt{2}$ este egal cu 0.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 0$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x - 8^x - 4 \cdot 4^x + 2 \cdot 2^x + 4 = 0$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x \in (1, +\infty) \\ x+1, & x \in (0, 1) \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ este continuă în punctul $x_0 = 1$.

b) Arătați că funcția $f$ este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$.

c) Demonstrați că $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \le 4$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.





**2.** Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cdot \ln x$ și $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2 x \cdot g(x)dx$.

b) Calculați $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x \cdot e^x} dx$.

c) Demonstrați că $\int_1^e (f(x) + g(x))dx = e^e$.

## Testul 26

Bacalaureat, 29 iunie 2011. Filiera teoretică: profilul real: specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x - 1$, $x + 1$ și $3x - 1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = x - 3$.

**4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

**5.** Calculați distanța de la punctul $A(2, 3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x - y - 6 = 0$ și $d_2: -x + 2y - 6 = 0$.

**6.** Calculați cosinusul unghiului $M$ al triunghiului $MNP$, știind că $MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

a) Calculați $A^2 - 3A$.

b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$.

c) Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

**2.** Polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 5X + m$, cu $m \in \mathbb{R}$, are rădăcinile $x_1$, $x_2$ și $x_3$.

a) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}^*$ pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

c) Arătați că determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

b) Arătați că $f(x) > 0$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

c) Arătați că graficul funcției $f$ nu admite asimptotă spre $+\infty$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$.

a) Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei $Ox$, a graficului funcției $g: [0, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

b) Demonstrați că orice primitivă $F$ a funcției $f$ este crescătoare pe mulțimea $\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $\int_{-10}^{10} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{10} f(x)\,dx$.

## Testul 27

Bacalaureat, 29 iunie 2011, subiect de rezervă. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați $\log_7\left(3 + \sqrt{2}\right) + \log_7\left(3 - \sqrt{2}\right)$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + ax + b$. Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care graficul funcției $f$ conține punctele $A(2, 3)$ și $B(-1, 0)$.

**3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x + 3^{x+1} = 36$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10, 11, 12, \ldots, 99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $M(2, -1)$ și $N(-1, 3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$.

**6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, ce are aria egală cu $4\sqrt{3}$.





### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră punctele $A_n(2^n, 3^n)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

a) Scrieți ecuația dreptei $A_0A_1$.

b) Demonstrați că punctele $A_1$, $A_2$, $A_3$ nu sunt coliniare.

c) Determinați numărul natural $n$ pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

**2.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$.

a) Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$" este $e = 3$.

b) Determinați simetricul elementului 2 în raport cu „$\circ$".

c) Arătați că mulțimea $H = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$".

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x + e^x$.

a) Arătați că $xf'(x) = 1 + xe^x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(1, e)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

a) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției $f$ este concavă pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $a \geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx \geq 3a^2 + 2$.

## Testul 28

Bacalaureat, 31 august 2011. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ și $a_3 = 5$. Calculați $a_6$.

**2.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2 - x - 3 \leq 0$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x + 2) - \log_3(x - 4) = 1$.

4. După o scumpire cu 5%, prețul unui produs crește cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
5. În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(1, 4)$ și $B(5, 0)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.
6. Calculați raza cercului circumscris triunghiului $ABC$, știind că $BC = 9$ și $m(\sphericalangle BAC) = 120°$.

## Subiectul al II-lea

1. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

   a) Calculați $D(-1, 1)$.

   b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $D(x, 2010) = 1$.

   c) Demonstrați că $D(x, y) \cdot D(x, -y) = D(x^2, y^2)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

   a) Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Arătați că legea „$*$" este asociativă.

   c) Calculați $1 * 2 * \ldots * 2011$.

## Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$.

   a) Calculați $f'(0)$.

   b) Arătați că funcția $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

   c) Arătați că $a^3 + a^2 + a - b^3 - b^2 - b \le 3^b - 3^a$, oricare ar fi numerele reale $a$, $b$ cu $a \le b$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul $n$ se consideră funcția $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^x$.

   a) Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x} dx$.

   b) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.

   c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2) dx \ge \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$.





# Testul 29

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 9 iunie 2010. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

## Subiectul I

1. Calculați $\sqrt[3]{8} + \log_2 \frac{1}{4}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + m$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care minimul funcției $f$ este egal cu 2.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{6-x^2} = 25$.
4. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $A_x^2 = 12$.
5. Scrieți ecuația dreptei determinate de punctele $A(2, 3)$ și $B(4, 5)$.
6. Calculați $\cos x$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

## Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

   a) Calculați $A^2 + A$.

   b) Demonstrați că $\det(A) = \det(A + I_2)$.

   c) Calculați $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{10}$.

2. Se consideră ecuația $x^3 + 2x^2 + 4 = 0$ cu soluțiile $x_1, x_2, x_3$.

   a) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$.

   b) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

   c) Calculați valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & 1:x_2 & 1:x_3 \\ x_2 & 1:x_3 & 1:x_1 \\ x_3 & 1:x_1 & 1:x_2 \end{vmatrix}$.

## Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$.

   a) Calculați $f'(x)$.

   b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $\infty$ la graficul funcției $f$.

   c) Demonstrați că $-\frac{3}{5} \le f(x) \le 0$, oricare ar fi $x \in [1, 2]$.

**2.** Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1+\sqrt{x}$.

a) Calculați $\int_0^{2010}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea, în jurul axei $Ox$, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $\sqrt{x}\le x$, adevărată pentru orice $x\in[1,\infty)$, demonstrați că $\int_1^2 f^{2010}(x)dx\le\frac{3^{2011}-2^{2011}}{2011}$.

## Testul 30

Bacalaureat, 30 iunie 2010. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.

**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.

**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

**5.** Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.

**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3$, $AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din $A$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$.

a) Calculați $A^2-A$.

b) Determinați inversa matricei $A$.

c) Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010&2010\\2009&2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

**2.** Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.

a) Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului $f$.

c) Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}_3$.





### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Demonstrați că funcția $f$ este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

c) Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Calculați $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

c) Calculați $\int_1^e f(x)\cdot\ln x\,dx$.

## Testul 31

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru proba din 30 iunie 2010. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$, astfel încât $a_3=5$ și $a_5=11$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.

**2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1, g(x)=x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f$ și $g$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.

**4.** Calculați $a\cdot b$, știind că $a+b=150$ și numărul $a$ reprezintă 25% din numărul $b$.

**5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ și $C(m+1,m^2)$ sunt coliniare.

**6.** Calculați $\cos x$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}m&1&0\\1&1&1\\1&1&m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}mx+y=-1\\x+y+z=3\\x+y+mz=0\end{cases}$, cu $x,y,z\in\mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei $A$.
b) Rezolvați sistemul pentru $m = 0$.
c) Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

**2.** Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4)+4$.
a) Demonstrați că legea „$*$" este asociativă.
b) Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.
c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
a) Calculați $f'(x)$.
b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(2, 5)$.
c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcțiile $f, g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$.
a) Demonstrați că funcția $g$ este o primitivă a funcției $f$.
b) Calculați $\int_1^3 f(x)dx$.
c) Calculați $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} f(x)dx$.

## Testul 32

Bacalaureat, 30 iunie 2009. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.
**2.** Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care punctul $A(m, -1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 1$.
**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 3) = 2$.
**4.** Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente.
**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(1, 2)$ și $C(2, -1)$. Calculați distanța de la punctul $C$ la mijlocul segmentului $AB$.
**6.** Triunghiul $ABC$ are $AB = AC = 8$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30°$. Calculați aria triunghiului $ABC$.





### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și funcția:

$f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), f(X) = X^2 - 3X + I_3$.

a) Calculați $\det(I_3 + B)$.
b) Demonstrați că $f(A) = I_3 + B$.
c) Arătați că $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$.

**2.** Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție:
$x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = (x-3)(y-3)+3$.
a) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x \circ x = x * x$.
b) Determinați numărul întreg $a$ cu proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg $x$.
c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x*(y+1)=4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.
a) Calculați $f'(x), x \in \mathbb{R}^*$.
b) Calculați $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.
a) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea, în jurul axei $Ox$, a graficului funcției $f$.
b) Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.
c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}$.

## Testul 33

Bacalaureat, sesiunea specială pentru olimpici, 28 mai 2009. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați $\log_6 24 - \log_6 4$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(2009)$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-5} = 2$.

**4.** Determinați numărul natural $n$, $n \geq 5$, știind că $\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6$.

**5.** Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1, 2)$ și $B(4-a, 4+a)$ este egală cu 5.

**6.** Calculați $\cos^2 45° + \sin^2 135°$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = -1 \\ 2x - z = a \end{cases}$, cu $a \in \mathbb{R}$. Fie $A$ matricea sistemului.

a) Calculați determinantul matricei $A$.

b) Pentru $a = 1$, rezolvați sistemul.

c) Determinați cea mai mică valoare a numărului natural $a$ pentru care soluția sistemului este formată din trei numere naturale.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție asociativă $x \circ y = x + y + 1$.

a) Calculați $2008 \circ 2009$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $x \circ x^2 \leq 3$.

c) Fie mulțimea $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \geq 2 \text{ și } C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 = n + 6\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii $A$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

a) Verificați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul $A(1, 2)$.

c) Arătați că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.





**2.** Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $f_2$.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$.

c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x)dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

## Testul 34

Bacalaureat, subiect de rezervă pentru sesiunea din 30 iunie 2009. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați $C_3^2 + 3!$.

**2.** Determinați soluțiile reale ale ecuației $\log_5(3x + 4) = 2$.

**3.** Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, știind că $x_1$ și $x_2$ sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 2 = 0$.

**4.** Se consideră funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$. Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

**5.** Fie punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, 3)$. Determinați numerele reale $a$ și $b$ astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

**6.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB = 4$, $AC = \sqrt{7}$ și $BC = \sqrt{3}$. Calculați măsura unghiului $B$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $f(0) + f(1)$.

b) Arătați că $f(1) \cdot f(-1) = I_3$.

c) Demonstrați că $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

**2.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$, unde $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$.

a) Rezolvați ecuația $\hat{2}x + \hat{5} = \hat{1}$, unde $x \in \mathbb{Z}_6$.

b) Calculați determinantul $\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{2} & \hat{3} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{2} \end{vmatrix}$ în $\mathbb{Z}_6$.

c) Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} \hat{2}x+y=\hat{4} \\ x+\hat{2}y=\hat{5} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)\ 2x^3-3x^2+1$.

a) Calculați $f'(1)$.

b) Determinați intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției $f$.

c) Arătați că $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\geq -\frac{1}{2}$.

**2.** Se consideră funcțiile $f, g:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^x$ și $g(x)=e^{1-x}$.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $f$.

b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=xf(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

c) Arătați că $\int_0^{\frac{1}{2}}(g(x)-f(x))dx\geq 0$.

## Testul 35

Bacalaureat, 24 august 2009. Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii. Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic – toate calificările profesionale.

### Subiectul I

**1.** Calculați $2\log_3 4-4\log_3 2$.

**2.** Determinați soluțiile reale ale ecuației $2^{x-1}+2^x=12$.

**3.** Determinați numărul natural $n$, $n\geq 1$, știind că $A_n^1+C_n^1=10$.

**4.** Fie funcția $f:[0,2]\to\mathbb{R}, f(x)=-4x+3$. Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

**5.** Se consideră triunghiul echilateral $ABC$ înscris într-un cerc de centru $O$. Arătați că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

**6.** Calculați $\sin 135°$.





### Subiectul al II-lea

**1.** În mulțimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$.

a) Determinați numerele $a$, $b$ și $c$, astfel încât $A+F=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&2&5\\0&0&2\end{pmatrix}$.

b) Arătați că pentru $a=c=0$ și $b=-1$ matricea $A$ este inversa matricei $F$.

c) Rezolvați ecuația $F\cdot X=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

**2.** Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

a) Arătați că $x*y=xy+(1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(1-x)=0$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)+g(x^2)+g(x^3)+\ldots+g(x^{2009})+x^{2010}}{x^{2009}}$.

**2.** Se consideră $I_n=\int_e^{e^2}x\ln^n x\,dx$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $I_0$.

b) Arătați că $I_n\leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Demonstrați că are loc relația $I_n=\frac{e^2(e^2\cdot 2^n-1)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

# 2. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat 2015

## Testul 1

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.

**2.** Demonstrați că ecuația $(a^2+1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.

**3.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right)f(-1)f(0)f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\left\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\right\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ și $C(8, 2)$. Calculați distanța de la $C$ la mijlocul segmentului $AB$.

**6.** Calculați $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°)$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+2y-az=3 \\ 2x-y-z=1 \\ -x+3y+z=2 \end{cases}$, unde $a$ este un parametru real. Notăm cu $A$ matricea sistemului.

a) Demonstrați că tripletul $(-1, 2, -5)$ este soluție a sistemului în cazul $a = 0$.

b) Determinați determinantul matricei $A$.

c) Dacă $a \neq 0$, demonstrați că soluțiile sistemului nu depind de $a$.

**2.** Se consideră mulțimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.

a) Demonstrați că mulțimea $H$ este parte stabilă în raport cu adunarea din $\mathbb{Z}_8$.

b) Determinați $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.

c) Calculați $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.





c) Demonstrați că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.

**2.** Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Calculați $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x}dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g: [1, e] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.

c) Demonstrați că $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)dx \leq 0$.

## Testul 2

### Subiectul I

**1.** Calculați $C_6^3 - A_4^2 + 3$.

**2.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(x^2 - 16) = 2$.

**3.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ și $a_5 = 18$. Calculați $a_{2012}$.

**4.** După două scumpiri succesive cu 10% și apoi cu 20%, prețul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinați prețul inițial.

**5.** În sistemul de coordonate carteziene $xOy$ se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ și $C(m, 3)$. Determinați valoarea numărului real $m$, știind că punctele $A$, $B$ și $C$ sunt coliniare.

**6.** Demonstrați că $\sin^2 20° + \sin^2 70° = 1$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^2 - 6A - I_2 = O_2$.

b) Demonstrați că matricea $A$ este inversabilă și determinați inversa sa.

c) Demonstrați că $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = O_2$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu $x_1$, $x_2$ și $x_3$ rădăcinile sale.

a) Determinați valoarea numărului real $a$, știind că $x_1 = 1$.

b) Demonstrați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

c) Determinați valoarea numărului real $a$, știind că polinomul $f$ are toate rădăcinile reale.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

a) Demonstrați că $f'(x)=-\dfrac{x}{(x+1)^2}$, pentru orice $x\in[0,\infty)$.

b) Demonstrați că funcția $f$ este strict descrescătoare.

c) Demonstrați că $\dfrac{x}{x+1}\le\ln(x+1)$, pentru orice $x\in[0,\infty)$.

**2.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}$.

a) Calculați $\int\left(f(x)-\dfrac{x+1}{x^2}\right)dx$.

b) Calculați $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $x^2+1\ge 2x$, pentru orice $x\in(0,\infty)$, demonstrați că $\int_1^e f(x)dx\ge 3$.

## Testul 3

### Subiectul I

**1.** Determinați numerele reale $a$, $b$ pentru care $(2a-1)^2+(3b-2)^2=0$.

**2.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+1$ este egală cu $-\dfrac{1}{4}$.

**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{25-x^2}=4$.

**4.** Câte numere naturale de patru cifre diferite se pot forma cu elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$?

**5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(4,2)$, $B(1,1)$ și $C(-1,3)$. Calculați aria triunghiului $ABC$.

**6.** Se consideră triunghiul $ABC$ în care $AB=4$, $AC=6$ și măsura unghiului $A$ este $60°$. Determinați lungimea laturii $BC$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră numerele întregi impare și distincte $a$, $b$, $c$ și punctele $A(b,c)$, $B(c,a)$ și $C(a,b)$. De asemenea, considerăm determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} b & c & 1\\ c & a & 1\\ a & b & 1\end{vmatrix}$.

a) Demonstrați că $-2\Delta=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

b) Demonstrați că punctele $A$, $B$, $C$ nu pot fi coliniare.

c) Demonstrați că aria triunghiului $ABC$ este număr natural.

**2.** În $\mathbb{R}[X]$, considerăm polinoamele $f=(X-1)^{2012}+(X-2)^{2011}$ și $g=X^2-3X+2$.

a) Demonstrați că $g=(X-1)(X-2)$.

b) Demonstrați că $f(1)+f(2)=0$.

c) Determinați restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g$.





### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(-2,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$.

a) Determinați ecuația asimptotei la $+\infty$ la graficul funcției $f$.

b) Demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare.

c) Demonstrați că $f(x)<1$, pentru orice $x\in(-2,\infty)$.

**2.** Se consideră funcțiile $f, g:[0,3]\to\mathbb{R}, f(x)=(3x^2-x^3)e^{-x}$ și $g(x)=x^3e^{-x}$.

a) Demonstrați că funcția $g$ este primitivă a funcției $f$.

b) Determinați aria suprafeței cuprinse între axa $Ox$, graficul funcției $f$ și dreptele de ecuație $x=1$ și $x=2$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $e^{-x}\le 1$, pentru orice $x\in[0,\infty)$, arătați că $\int_0^1 g(x)dx\le\dfrac{1}{4}$.

## Testul 4

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\log_2 8+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{125}=0$.

**2.** Demonstrați că punctul $A\left(\dfrac{2013}{2012},2\right)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2012x-2011$.

**3.** Se consideră mulțimea $A=\{a,b,c,d,e\}$. Determinați numărul submulțimilor lui $A$ formate cu 3 elemente.

**4.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x-10\cdot 2^x+16=0$.

**5.** În triunghiul $ABC$, punctele $M$, $N$ și, respectiv, $P$ sunt mijloacele laturilor $AB$, $BC$ și, respectiv, $CA$. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BP}=0$.

**6.** Fie triunghiul $ABC$ în care $AB = \sqrt{3}$, $m(\sphericalangle ACB) = 30°$ și $m(\sphericalangle BAC) = 45°$. Determinați lungimea laturii $BC$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $AB = C$.
b) Demonstrați că $\det(AB) = 0$.
c) Dați exemplu de două matrice $X$, $Y$ de orice tip cu proprietatea că $\det(XY) = 0$ și $\det(YX) \neq 0$.

**2.** Fie numerele reale $a$, $b$. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea „$\square$" definită prin $x \square y = ax + by + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
a) Determinați elementul neutru al legii „$\square$" în cazul $a = b = 1$.
b) Determinați $a$, $b$, știind că legea „$\square$" este comutativă și $3 \square 2 = 8$.
c) Determinați toate perechile de numere naturale $(a, b)$ pentru care $b \square a = 7$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 4x + 4$.

a) Demonstrați că funcția $f$ are un singur punct de minim.
b) Determinați abscisa $x_0$ a unui punct de pe graficul funcției $f$ pentru care tangenta la grafic în punctul de coordonate $(x_0, f(x_0))$ are panta egală cu 104.
c) Demonstrați că $f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) \geq 2$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

a) Calculați $\int (x^2+1) f(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Știind că $x^2 + 1 \geq 1$, pentru orice $x \in [0, 1]$, demonstrați că $\int_0^1 f^2(x) \leq \dfrac{4}{3}$.

# Testul 5

## Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$.
**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a dreptelor de ecuații $2x + y - 4 = 0$ și $3x + y - 5 = 0$.





**3.** Determinați valorile parametrului real $m$ pentru care soluțiile $x_1$ și $x_2$ ale ecuației $x^2 - (m-1)x + m + 4 = 0$ verifică condiția $x_1 = x_2$.

**4.** Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$.

**5.** Determinați lungimea catetelor unui triunghi dreptunghic, știind că suma lor este 10, iar triunghiul are aria 8.

**6.** Se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(3, 4)$, $C(2, 5)$ și $D(4, 7)$. Demonstrați că dreptele $AB$ și $CD$ sunt paralele.

## Subiectul al II-lea

**1.** Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ se consideră punctele $A_n(3n + 1, 1 - 3n)$ și $B_n(2n - 1, 4n - 3)$.

a) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, punctul $A_n$ aparține dreptei $d$ de ecuație $x + y - 2 = 0$.

b) Determinați aria triunghiului $A_0A_1B_2$.

c) Demonstrați că există $k, l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A_k = B_l$.

**2.** În $\mathbb{R}[X]$, se consideră polinoamele $f = X^3 - 2X^2 - X + 2$ și $g = X^5 - 3X^4 + 2X^3 + X^2 - 3X + a$, cu $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $f = (X - 1)(X + 1)(X - 2)$.
b) Demonstrați că $g(1) = g(-1) = g(2)$.
c) Determinați numărul real $a$, știind că polinomul $g$ este divizibil cu polinomul $f$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$.

a) Calculați derivata funcției.
b) Determinați coordonatele punctului de extrem al funcției $f$.
c) Demonstrați că $0 \leq f(x) < 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Se consideră funcția $f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$.

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f$ în jurul axei $Ox$.

b) Determinați primitivele funcției $g: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2xf(x)$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$, arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 2$.

## Testul 6

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că numerele $x + 7$, $2x + 5$ și $3x + 13$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Arătați că $\log_3 27 + \log_5 25 < \sqrt{36}$.

**3.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 4$. Determinați toate valorile reale ale lui $x$ pentru care $f(-x) + f(1) \leq 1$.

**4.** Demonstrați că numărul $A_{2012}^2 - C_{2011}^1$ este pătrat perfect.

**5.** Determinați valorile reale ale numărului $a$, știind că distanța dintre punctele $A(3, 2)$ și $B(a, 8)$ este egală cu 10.

**6.** Determinați aria unui triunghi $ABC$, știind că $AC = 15$, $BC = 12$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30°$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A + A^2 + A^3 = O_3$.

b) Demonstrați că matricea $I_3 + A$ este inversabilă și determinați inversa sa.

c) Dați exemplu de o matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $B \neq O_3$, astfel încât $AB = BA = O_3$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + 4X - 1$. Notăm cu $x_1$, $x_2$, $x_3$ rădăcinile sale.

a) Dacă $\alpha$ este una dintre rădăcinile polinomului $f$, demonstrați că $\alpha^4 = 9\alpha - 2$.

b) Folosind, eventual, punctul anterior, calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

c) Demonstrați că polinomul $f$ nu are toate rădăcinile reale.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (-3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}$.

a) Determinați ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ la graficul funcției $f$.

b) Calculați derivata funcției $f$.

c) Determinați valoarea minimă a funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

a) Calculați $\int_2^4 \dfrac{f^2(x)}{\ln^2 x}\, dx$.





b) Calculați $\int_1^e f(x)dx$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $\ln(x + 1) \leq x$, pentru orice $x \geq 0$, demonstrați că $\int_0^1 f(x+1)dx \leq \frac{5}{6}$.

## Testul 7

### Subiectul I

**1.** O progresie aritmetică cu rația 5 are suma primilor trei termeni egală cu 126. Determinați primul termen al progresiei.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2 + (m + 1)x + 5$. Determinați valorile parametrului real $m$, știind că vârful parabolei asociate funcției $f$ are abscisa egală cu $-1$.

**3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(3x + 1) - \log_3(3x - 1) = -1$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element al mulțimii $A = \{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$, acesta să fie număr prim.

**5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$. Calculați $5\vec{u} - 3\vec{v}$.

**6.** Determinați toate valorile numărului real $a$, dacă aria triunghiului cu vârfurile în punctele $A(0, 2)$, $B(4, 0)$ și $C(a, 1)$ este egală cu 4.

### Subiectul al II-lea

**1.** Într-un sistem $xOy$, considerăm punctele $A(2, 3)$ și $B(4, 5)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm punctele $C_n(n - 3, n + 2)$.

a) Determinați ecuația dreptei $AB$.

b) Demonstrați că punctele $C_1$, $C_2$ și $C_3$ sunt coliniare.

c) Demonstrați că aria triunghiului $ABC_n$ este constantă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$” prin $x * y = xy - 6x - 6y + 42$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $a * C_4^2 = C_4^2 * a = C_4^2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $x * (y * z) = (x * y) * z$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2011 * 2012$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcțiile $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$, $g(x) = e^x - 1 - x$.

a) Demonstrați că $f'(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

b) Demonstrați că $g(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

c) Demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare.

**2.** Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$.

a) Calculați $\int \left( f(x) - \frac{1}{x} \right) dx$, pentru $x \in (0, \infty)$.

b) Calculați $\int_1^2 f(x)dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_1^x (t+1)f(t)dt}{x}$.

## Testul 8

### Subiectul I

**1.** Arătați că numărul $A = \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \ldots + \log_2 \frac{8}{7}$ este natural.

**2.** Determinați soluțiile întregi ale ecuației $x^2 - x - 6 < 0$.

**3.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5^{x-3} - \sqrt{5}$ cu axa $Ox$.

**4.** Demonstrați că $C_4^2 + A_4^2 = 18$.

**5.** Se consideră triunghiul $ABC$. Fie $M$ mijlocul laturii $AB$ și $N$ mijlocul laturii $AC$. Demonstrați că $2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB} = 0$.

**6.** Demonstrați că expresia $E = (\sin x - \cos x)^2 + 2 \sin x \cos x$ este independentă de valorile numărului real $x$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \det(A - xI_2)$.

a) Calculați $f(0)$.





b) Determinați numerele reale $x$ pentru care $f(x) = 0$.

c) Demonstrați că matricea $B = A - (\sqrt{3} - \sqrt{2})I_2$ este inversabilă.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ definim legea „$*$” definită prin $x * y = 2xy - 2x - 2y + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x * y = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că $x * (y * z) = (x * y) * z$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $x * x * x = 5$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2x + 4}, & x < -2 \\ e^{x+2} - 3, & x \geq -2 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ este continuă în punctul $x = -2$.

b) Demonstrați că graficul funcției $f$ admite asimptotă oblică la $-\infty$.

c) Demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

**2.** Pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$, definim funcțiile $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n + 1}{x^2 + 1}dx$.

a) Calculați $\int_1^3 f_2(x)\,dx$.

b) Demonstrați că $\int_1^2 f_{2012}(x)dx \geq \int_1^2 f_{2011}(x)dx$.

c) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între dreptele de ecuație $x = 1$, respectiv $x = 2$, axa $Ox$ și graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = f_1(x) - \frac{1}{x^2 + 1}$.

## Testul 9*

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 2^4$.

**2.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2 \cdot 3^x + 3^{x+1} = 45$.

**3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 - x + 1$.

**4.** Prețul de vânzare al unui produs este de 200 lei. Știind că acest preț se obține din prețul de fabricație la care se adaugă o cotă de TVA de 25%, determinați prețul de fabricație al acestui produs.

**5.** În sistemul de coordonate carteziene $xOy$, se consideră punctele $M(1, 1)$, $N(5, 5)$, $P(7, 11)$. Determinați coordonatele unui punct $Q$, știind că $MNPQ$ este paralelogram.

**6.** Demonstrați că $\sin(90° - x)\cos x + \cos(90° - x)\sin x = 1$, pentru orice $x \in (0°, 90°)$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Într-un sistem de axe carteziene $xOy$, se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(2, 2)$ și $B_n\left(\frac{2n}{n^2+1}, \frac{n^2-1}{n^2+1}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

a) Determinați aria triunghiului $OAB_1$.

b) Determinați ecuația dreptei $AB_{-1}$.

c) Demonstrați că, pentru orice $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, punctele $B_0$, $B_1$ și $B_n$ nu pot fi coliniare.

**2.** Se consideră mulțimile $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3l + 1 \mid l \in \mathbb{Z}\}$ și $C = \{3p + 2 \mid p \in \mathbb{Z}\}$.

a) Demonstrați că $2010 \in A$, $7 \in B$ și $14 \in C$.

b) Demonstrați că, oricare ar fi $x \in B$ și $y \in C$, avem $x + y \in A$.

c) Demonstrați că adunarea numerelor întregi determină pe mulțimea $A$ o structură de grup comutativ.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Determinați punctele de extrem ale acestei funcții.

b) Determinați punctul de inflexiune al graficului funcției $f$.

c) Demonstrați că $-2 \le f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) \le 6$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1, & x \le 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_0^e f(x)dx$.

c) Determinați volumul obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g: [0, 1] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.





# Testul 10

## Subiectul I

**1.** Demonstrați că numerele 1, $\sqrt[3]{27}$ și $\log_2 512$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 8 - x$. Calculați $f(0)f(1)f(2)\ldots f(9)f(10)$.

**3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{x^2 + x - 4} = 2\sqrt{2}$.

**4.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 59, 60\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un element al acestei mulțimi, acesta să nu fie divizibil nici cu 5.

**5.** Fie $O$ intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$.

**6.** Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC$, cu ipotenuza $AB$. Demonstrați că $\cos A \cos B = \sin A \sin B$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că, dacă $a = 10$, atunci $z = 0$.

b) Dacă $a = 1$, determinați o soluție a sistemului care respectă condiția $x = 2y$.

c) Rezolvați sistemul în cazul $a \ne 1$.

**2.** Se consideră mulțimea $G = \left\{ X(a) \,\middle|\, X(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Demonstrați că $X(a)X(b) = X(a + b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că înmulțirea matricelor determină o structură de grup comutativ pe mulțimea $G$.

c) Determinați numărul real $c$ pentru care $X(-3)X(-2)X(-1)X(0)X(1)X(2)X(3) = X(c)$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 12x - 16$.

a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x = 4$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.

c) Determinați numerele reale $x$ pentru care $f(x) \le 0$.

**2.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $I_n = \int_0^1 xe^{x^n} dx$.

a) Calculați $I_1$.

b) Calculați $I_2$.

c) Demonstrați că $I_{100} \le I_{99}$.

# Testul 11

## Subiectul I

**1.** Determinați $x \in (0, \infty)$ pentru care numerele 2, $x + 3$, 8 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + x^2 + 1$. Demonstrați că $f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 0$.

**3.** Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Câte submulțimi ale mulțimii $A$ au cel puțin 5 elemente?

**4.** Ordonați crescător numerele $\frac{1}{|\sqrt{2} - \sqrt{3}|}$, $\log_2 \frac{1}{8}$ și 0,(13).

**5.** Într-un sistem de axe $xOy$, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ și $C(4, 2)$. Demonstrați că triunghiul $ABC$ este isoscel.

**6.** Demonstrați că $\cos 10° + \cos 30° + \cos 50° + \ldots + \cos 170° = 0$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^2 - I_2 = O_2$.

b) Demonstrați că matricea $A$ este inversabilă și determinați inversa sa.

c) Dați exemplu de două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ pentru care $XY = O_2$.

**2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ definim operația „$\oplus$" definită prin $x \oplus y = x + y + \hat{3}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_6$.

a) Calculați $\hat{5} \oplus \hat{4}$.

b) Demonstrați că legea „$\oplus$" este asociativă.

c) Determinați elementul neutru al legii „$\oplus$".

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

a) Demonstrați că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$.

b) Demonstrați că graficul funcției $f$ nu admite puncte de extrem.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la $+\infty$, la graficul funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f: [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{2-x}$.

a) Determinați primitivele funcției $f$.





b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g: [0, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = f(x) - e^{2-x}$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, demonstrați că $\int_0^2 f(x)dx \geq 4e$.

# Testul 12*

## Subiectul I

**1.** Determinați cel mai mare număr întreg $x$ care verifică inegalitatea $x < 3\sqrt{2}$.

**2.** Demonstrați că rădăcinile ecuației $x^2 - mx - (m + 2) = 0$ sunt reale distincte, oricare ar fi valoarea parametrului real $m$.

**3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $3^{4-2x} \leq 81$.

**4.** Demonstrați că $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 2^3$.

**5.** Fie $M, N, P$ mijloacele laturilor $BC$, $CA$ și, respectiv, $AB$ ale triunghiului $ABC$. Arătați că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = 0$.

**6.** Se consideră triunghiul $ABC$ în care $AB = 4$, $BC = 6$ și $AC = 8$. Determinați $\cos A$.

## Subiectul al II-lea

**1.** În sistemul de axe $xOy$, se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ și $C(3, 7)$. Notăm cu $M$ mijlocul laturii $BC$.

a) Determinați ecuația dreptei $AM$.

b) Demonstrați că triunghiurile $AMB$ și $AMC$ au arii egale.

c) Demonstrați că, pentru orice punct $P \in AM$, triunghiurile $ABP$ și $ACP$ au aceeași arie.

**2.** Pe mulțimea $A = (0, \infty)$ definim legea „$\circ$" definită prin $x \circ y = \sqrt{xy}$.

a) Demonstrați că $16 \circ 81 \in \mathbb{N}$.

b) Demonstrați că $1 \circ (16 \circ 81) < (1 \circ 16) \circ 81$.

c) Demonstrați că legea „$\circ$" nu este asociativă.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Determinați valoarea numărului real $a$, știind că funcția $f$ este continuă în punctul $x = 1$.

b) Pentru $a = 1$, demonstrați că funcția $f$ este derivabilă în punctul $x = 1$.

c) Pentru $a = 1$, demonstrați că $f(x + 1) + f(x - 1) \geq 2f(x)$, oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$.

**2.** Se consideră funcțiile $f, F:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2x+1}$, $F(x)=\frac{2x+1}{3}\sqrt{2x+1}$.

a) Demonstrați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.
b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între axa $Ox$, graficul funcției $f$ și dreptele $x=4$ și $x=12$.
c) Determinați volumul obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)$.

## Testul 13*

### Subiectul I

**1.** Se consideră intervalele deschise $I=(2,7)$ și $J=(4,9)$. Determinați toate elementele întregi ale mulțimii $I\cap J$.

**2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{2}x+3$. Demonstrați că, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{Q}, a\neq b$, avem $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

**3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $4^x-4\cdot 2^x+3=0$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural format din două cifre diferite, acesta să fie pătrat perfect.

**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{w}=4\vec{i}-4\vec{j}$. Determinați numerele reale $x, y$ cu proprietatea $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$.

**6.** În triunghiul $ABC$ avem $AB=5$, $BC=8$ și $CA=5$. Determinați lungimea medianei care pornește din punctul $A$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră determinanții $A=\begin{vmatrix} a & b & -2\\ -2 & a & b\\ b & -2 & a\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} 2012 & -2010 & -2\\ -2 & 2012 & -2010\\ -2010 & -2 & 2012\end{vmatrix}$ și $C=\begin{vmatrix} x^2 & x & -2\\ -2 & x^2 & x\\ x & -2 & x^2\end{vmatrix}$, unde $a, b, x\in\mathbb{R}$

a) Demonstrați că $2A=(a+b-2)((a-b)^2+(a+2)^2+(b+2)^2)$.
b) Demonstrați că $B=0$.
c) Determinați toate valorile reale ale numărului $x$ pentru care $C=0$.

**2.** Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{10}$ definim operația „$*$” prin relația $x*y=x+y+\hat{2}$.

a) Demonstrați că legea „$*$” este comutativă.
b) Demonstrați că legea „$*$” admite element neutru.
c) Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.





### Subiectul al III-lea

**1.** Fie funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{ax+2}{x-1}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea numărului real $a$, știind că graficul funcției $f$ admite dreapta de ecuație $y=2$ ca asimptotă orizontală la $+\infty$.
b) Pentru $a=2$, demonstrați că funcția $f$ este strict crescătoare.
c) Pentru $a=2$, demonstrați că $f(3\sqrt{2})<f(2\sqrt{3})$.

**2.** Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)e^{-\frac{x}{2}}dx$.

b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $f$.

c) Știind că $e^{\frac{x}{2}}\le\sqrt{e}$, pentru orice $x\in[0,1]$, demonstrați că $\int_0^1 f(x)dx\le\frac{2\sqrt{e}}{3}$.

## Testul 14*

### Subiectul I

**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se știe că $a_3=11$ și $a_{11}=3$. Determinați $a_7$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+3$. Demonstrați că $f(2-t)=f(2+t)$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$.

**3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\lg(2x+96)=2$.

**4.** Prețul de vânzare al unui produs este de 280 lei. Acest preț este format din prețul de fabricație, adaosul comercial și TVA-ul. Se știe că adaosul reprezintă 16% din prețul de fabricație, iar TVA-ul reprezintă 24% din prețul de fabricație. Determinați prețul de fabricație.

**5.** Fie $O$ intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Determinați numărul real $a$ pentru care $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{aOD}=0$.

**6.** Într-un triunghi $ABC$, avem $m(\sphericalangle A)=45°$, $m(\sphericalangle B)=30°$, iar $BC=3\sqrt{2}$. Determinați lungimea laturii $AC$.

### Subiectul al II-lea

**1.** În sistemul $xOy$ considerăm punctele $A_n(n,n^2)$, $n\in\mathbb{N}$. Fie determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$.

a) Determinați ecuația dreptei $A_1A_2$.

b) Demonstrați că $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$.

c) Determinați valoarea numărului $n \in \mathbb{N}$, pentru care aria triunghiului $A_1A_2A_n$ este egală cu 48.

**2.** Se consideră mulțimea $M = \{f = aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4\}$. Se consideră polinomul $g = \hat{2}X^2 + X + \hat{1}$.

a) Determinați numărul de elemente al mulțimii $M$.

b) Determinați un polinom $h \in M$ cu proprietatea $g + h = \hat{0}$.

c) Demonstrați că $g^2 \in M$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 1$.

a) Demonstrați că $f'(x) = 12x(x+2)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați coordonatele punctului de minim al funcției $f$.

c) Demonstrați că $f(0{,}01) + f(-0{,}02) + f(0{,}03) + f(-0{,}04) + \ldots + f(0{,}09) + f(-0{,}10) > 10$.

**2.** Pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$, considerăm $I_n = \int_e^{e^2} x^n \ln x \, dx$.

a) Calculați $I_1$.

b) Calculați $I_{-1}$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}^*$, avem $I_n \geq 0$.

# Testul 15*

## Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\lg\frac{4+6}{2} > \frac{\lg 4 + \lg 6}{2}$.

**2.** Fie $x_1$ și $x_2$ rădăcinile ecuației $x^2 - 2x - 1 = 0$. Demonstrați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4$.

**3.** Determinați numerele reale $x \in (-1, \infty)$, pentru care $\sqrt{x+1} = 3$.

**4.** Determinați numerele naturale nenule $n$, pentru care $C_{n+1}^2 = 15$.

**5.** Într-un sistem de axe $xOy$, se consideră dreapta $d$ de ecuație $x + y - 3 = 0$. Determinați ecuația unei drepte perpendiculare pe dreapta $d$ și care conține punctul $A(3, 2)$.

**6.** Se consideră un triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$. Dacă $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$, calculați $\sin B$.





## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + az = 3 \\ 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - 2y + z = 4 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Verificați că tripletul $(2, 1, 0)$ este soluție a sistemului, oricare ar fi numărul real $a$.

b) Determinați valoarea parametrului real $a$ în cazul în care sistemul admite o soluție pentru care $z = 2$.

c) Dacă $(x_0, y_0, z_0)$ este soluția sistemului în cazul $a \neq 0$, demonstrați că $x_0^2 + y_0^2 + 2012z_0^2 = 5$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^{2012} - 2X^{2011} + X^{2010} - aX^2 + 2aX - a$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $f(2) = 2^{2010} - a$.

b) Determinați valoarea numărului real $a$ pentru care restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $X - 2$ este egal cu $2^{2010}$.

c) Demonstrați că polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $g = (X-1)^2$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

a) Determinați derivata funcției $f$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției $f$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

a) Determinați primitivele acestei funcții.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2012x^3}$.

c) Determinați un număr natural $a$ pentru care aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f$, axa $Ox$ și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = a$ este egală cu 8.

# 3. Modele de teste propuse pentru examenul de Bacalaureat 2015

## Testul 1

### Subiectul I

**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.

**2.** Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$ cu axele de coordonate.

**3.** Demonstrați că ecuația $x^2+mx-m^2-2=0$ admite soluții reale distincte, pentru orice $m\in\mathbb{R}$.

**4.** Demonstrați că $C_{18}^1-A_4^2=P_3$.

**5.** Calculați lungimea laturii $AC$ a triunghiului $ABC$, știind că $m(\sphericalangle B)=45°$, $m(\sphericalangle C)=30°$ și $AB=10$.

**6.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(5,-4)$ și $B(0,8)$. Calculați lungimea segmentului $AM$, unde $M$ este mijlocul segmentului $AB$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră numerele reale $a$, $b$ și sistemul $\begin{cases}x+y+az=4\\x+y+z=3\\-3x-y+2z=b\end{cases}$.

a) Demonstrați că sistemul nu are soluție în cazul $a=1$.
b) Rezolvați sistemul în cazul $a=2$, $b=-2$.
c) Determinați valoarea numărului real $a$ pentru care soluția sistemului verifică condiția $x+y+2z=4$.

**2.** Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-2X^2+aX-8$.

a) Determinați numărul real $a$, astfel încât o rădăcină a polinomului $f$ să fie egală cu 2.
b) Pentru $a=4$, calculați și restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g=X^2-X+2$.
c) Demonstrați că $f$ nu are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $a\in(2,+\infty)$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln x-2$.

a) Determinați ecuația tangentei duse la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0=1$.
b) Determinați coordonatele punctului extrem al graficului funcției $f$.





c) Determinați mulțimea numerelor $x\in(0,\infty)$ pentru care $f(x)>-1$.

**2.** Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x(x-1), & x<1\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\geq 1\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția $f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei $Ox$ a graficului funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, pentru orice $x\in[1,e]$.

## Testul 2

### Subiectul I

**1.** Calculați $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}-\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

**2.** Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care punctul $A(a,b+1)$ aparține graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x+1$.

**3.** Rezolvați ecuația $4^{2-x}=16$.

**4.** Rezolvați ecuația $\log_5(x+2)-\log_5(2x-5)=1$.

**5.** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1,1)$ și este paralelă cu dreapta $y=x+2$.

**6.** Demonstrați egalitatea $\sin 60°+\operatorname{tg}45°=\cos 30°+\operatorname{ctg}45°$.

### Subiectul al II-lea

**1.** În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $B=I_3+A$.

a) Calculați $A\cdot B$.
b) Calculați determinatul matricei $A^2+A^3$.
c) Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A\cdot X=X\cdot A$, atunci există numerele reale $a$, $b$, $c$ astfel încât

$$X=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}.$$

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 + aX + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Determinați numerele reale $a$ și $b$, știind că $f(1) = f(-2) = 0$.

b) Știind că $a = -3$, $b = 2$, determinați rădăcinile reale ale polinomului $f$.

c) Considerăm determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$. Demonstrați că $D = 0$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x+1}{e^x}$.

a) Verificați că $f'(x) = \dfrac{x}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $f$.

c) Arătați că $f(x) \le 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

**2.** Pentru orice numere reale $a$, $b$ considerăm integrala $\int_0^1 (ax+b)e^{x^2}\,dx$.

a) Calculați $I(2, 0)$.

b) Demonstrați că $I(a, b) + I(c, d) = I(a+c, b+d)$ pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $I(-2, -3) + I(-1, -2) + I(1, 2) + I(4, 3) > \dfrac{3}{2}$.

# Testul 3

## Subiectul I

**1.** Demonstrați că șirul cu termenul general $a_n = 2n + 3$ verifică relația $a_{2014} - a_{2013} = 2$.

**2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$.

**3.** Fie funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 3^x + \log_3 x$. Calculați $f(1)$.

**4.** Suma de 1200 lei se depune la bancă cu o rată a dobânzii de 10% pe an. Care este suma finală care se obține după un an?

**5.** Determinați punctul de intersecție al dreptei de ecuație $2x + y - 4 = 0$ cu axa $Ox$.

**6.** Triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $C$, iar raza cercului circumscris triunghiului este $R = 10$. Calculați lungimea laturii $AB$.





## Subiectul al II-lea

**1.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $AB \neq BA$.

b) Demonstrați egalitatea $\det(A+B) + \det(A-B) = 2\det(B)$.

c) Demonstrați că matricea $A$ nu este inversabilă, dar matricea $A + B$ este inversabilă.

**2.** Considerăm polinoamele $f = (X+1)^{2014} + (X-1)^{2014} - 2^{2014}$ și $g = X^2 - 1$.

a) Demonstrați că $f(1) + f(-1) = 0$.

b) Determinați rădăcinile polinomului $g$.

c) Demonstrați că polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $g$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f: (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

b) Determinați coordonatele punctului de extrem al funcției $f$.

c) Demonstrați că, pentru orice $a, b > 1$, are loc inegalitatea $f(a) + f(b) \ge 12$.

**2.** Se consideră funcțiile $f: \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x-1}$ și $F: \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}, F(x) = \dfrac{2x-1}{3}\sqrt{2x-1}$.

a) Calculați $\int f^2(x)\,dx$.

b) Demonstrați că funcția $F$ este o primitivă a funcției $f$.

c) Demonstrați că $\int_1^5 f(x) \cdot F^{2014}(x)\,dx = \dfrac{3^{6045}-1}{2015 \cdot 3^{2015}}$.

# Testul 4

## Subiectul I

**1.** Calculați suma $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + 25$.

**2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx^2 - mx + 2, m \in \mathbb{R}^*$. Determinați numărul real nenul $m$, știind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.

**3.** Calculați $\log_2(\operatorname{tg} 45°) + \log_2(\operatorname{ctg} 45°)$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{12}, \sqrt{14}, \sqrt{16}\}$, acesta să fie număr irațional.

**5.** Determinați ecuația dreptei care conține punctul $A(2, -3)$ și este perpendiculară pe dreapta $y = x + 3$.

**6.** Calculați lungimea laturii $BC$ a triunghiului $ABC$, știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și $m(\sphericalangle A) = 60°$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Fie $a \in \mathbb{R}$. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care $\det(A) = 0$.

b) Demonstrați că sistemul nu are soluție pentru $a = 6$.

c) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 6\}$ și $(x_0, y_0, z_0)$ este soluția sistemului $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$, demonstrați că $\frac{x_0}{z_0}$ nu depinde de $a$.

**2.** Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - aX + a$, unde $a \in \mathbb{R}$. Notăm cu $x_1, x_2, x_3$ rădăcinile sale.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $X - 1$.

b) Determinați toate valorile numărului real $a$ știind că polinomul $f$ are toate rădăcinile reale.

c) Pentru $a \geq 0$, demonstrați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = x_1 + x_2 + x_3$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x$.

a) Demonstrați că $f'(x) = \ln x$, pentru orice $x > 0$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

c) Demonstrați că funcția $f$ este convexă pe $(0, +\infty)$.

**2.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1$.

a) Determinați primitivele funcției $f_1$.

b) Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f_1(x)}$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $x^n \leq 1$, valabilă pentru orice $x \in [0, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, arătați că $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)}\,dx \leq \sqrt{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.





## Testul 5

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\sqrt[3]{125} - \sqrt{16} < \sqrt[3]{1331} - \sqrt{81}$.

**2.** Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 1 = 0$, demonstrați că $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 7$.

**3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $9^x = 3$.

**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{C_7^0, C_7^1, C_7^2, C_7^3, C_7^4, C_7^5, C_7^6, C_7^7\}$, acesta să fie divizibil cu 7.

**5.** Demonstrați că dreptele de ecuație $a: 2x + 3y - 1 = 0$ și $b: 6x - 4y + 3 = 0$ sunt perpendiculare.

**6.** Se consideră un triunghi $ABC$ dreptunghic în $A$. Dacă $\operatorname{tg} B = \frac{3}{4}$ și $AC = 9$, calculați perimetrul triunghiului $ABC$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^2 + A + I_2 = O_2$.

b) Determinați cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $A^n = I_2$.

c) Demonstrați că $A^{12} + A^{23} + A^{34} = O_2$.

**2.** Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.

a) Calculați $\hat{1} + \hat{2} + \ldots + \hat{6} + \hat{7}$.

b) Calculați $\hat{5}^{2013}$.

c) Determinați soluțiile ecuației $\hat{x}^2 = \hat{1}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Calculați $f'(x)$;

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.

c) Folosind, eventual, monotonia lui $f$, arătați că $2007^{\frac{1}{2008^2}} < 2008^{\frac{1}{2007^2}}$.

**2.** Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, considerăm integrala $I(a, b) = \int_1^a x^a \ln^b x\,dx$.

a) Calculați $I(-1, 2)$.

b) Demonstrați că $I(0,\ 1)=1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $t+\frac{1}{t}\geq 2$, valabilă pentru orice $t\in(0,\ \infty)$, demonstrați că $I(a,\ 1)+I(-a,\ 1)\geq 2$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

## Testul 6

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\log_5 24+\log_5 3=3\log_5 2+\log_5 45-1$.

**2.** Demonstrați că mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x^2-(m+1)x+m=0,\ m\in\mathbb{R}\right\}$ este nevidă.

**3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $2^{x+1}+2^{x+3}=10$.

**4.** Un produs se scumpește cu 25% astfel încât prețul final va fi 250 lei. Determinați prețul inițial.

**5.** Considerăm dreapta $d$ de ecuație $d: x+y=4$. Determinați valoarea numărului real $m$ dacă punctul $A(m,\ m)$ aparține dreptei $d$.

**6.** Demonstrați inegalitatea $\cos 80^\circ\cdot\cos 100^\circ<0$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Fie sistemul $\begin{cases}2x+y+3z=0\\3x+2y+z=0\\5x+3y+4z=0\end{cases}$.

a) Dacă $A$ reprezintă matricea sistemului, demonstrați că $\det A=0$.

b) Demonstrați că necunoscutele sistemului verifică relațiile: $x=-5z$ și $y=7z$.

c) Determinați toate soluțiile sistemului care verifică condiția $x^2+y^2+z^2=300$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^2+\hat{4}X+\hat{4}\in\mathbb{Z}_8[X]$.

a) Demonstrați că $f\left(\hat{x}+\hat{4}\right)=f\left(\hat{x}\right)$, pentru orice $\hat{x}\in\mathbb{Z}_8$.

b) Calculați suma $f\left(\hat{0}\right)+f\left(\hat{1}\right)+f\left(\hat{2}\right)+\ldots+f\left(\hat{7}\right)$.

c) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g=X+\hat{6}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Fie funcția $g:(0,\ \infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{x^2-1}{3x+1}$.

a) Calculați derivata funcției $g$.

b) Determinați numerele reale $a$, $b$ cu proprietatea că dreapta de ecuație $y=ax+b$ reprezintă asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $g$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}g'(x)=a$, unde $a$ are valoarea determinată la punctul anterior.





**2.** Fie funcția $f:[0,\ \infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x-\ln(x+1)$.

a) Calculați $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

b) Calculați $\int f(x)\,dx$.

c) Știind că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\geq 0$, demonstrați că $\int_1^2\ln\left(1+x^4\right)dx\leq\frac{31}{5}$.

## Testul 7

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $\left(-\infty,\sqrt{5}\right)\cap(2,\ \infty)\neq\varnothing$.

**2.** Determinați soluțiile sistemului $\begin{cases}x+y=3\\y=x^2-3x+4\end{cases}$.

**3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x^2+3}=3x-1$.

**4.** Calculați numărul de submulțimi cu 4 elemente ale mulțimii $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\}$, care conțin simultan pe $a$ și $g$ și nu conțin pe $f$.

**5.** Demonstrați că punctele de coordonate $A(1,\ 1)$, $B(3,\ 7)$ și $C(5,\ 3)$ reprezintă vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel.

**6.** Demonstrați că $\sin 127^\circ>\cos 127^\circ$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră numărul real $a$ și sistemul $\begin{cases}x+y+az=4\\-x+y+az=2\\x+y+2z=5\end{cases}$.

a) Demonstrați că în cazul $a=2$ sistemul nu admite soluții.

b) Dacă $A$ reprezintă matricea sistemului, determinați mulțimea valorilor lui $a$ pentru care această matrice este inversabilă.

c) Demonstrați că în cazul $a\neq 2$ soluția sistemului verifică condiția $x^2+y^2+z^2\geq 1$.

**2.** Pe mulțimea $(0,\ \infty)$, definim legea „$*$” definită prin $x*y=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

a) Demonstrați că $6*3=8*4$.

b) Determinați toate valorile reale ale numărului $a\in(0,\ \infty)$ pentru care $a*a=2$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $a,\ b\in\mathbb{N}^*$, avem $(a*(2a))+(b*(2b))\in\mathbb{N}$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$.

a) Demonstrați că $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, pentru orice $x\in(0,\infty)$.

b) Determinați coordonatele punctelor de extrem ale graficului funcției $f$.

c) Determinați toate valorile reale ale numărului $a\in(0,3)$ pentru care $f(a)=4e$.

**2.** Fie $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Calculați $I_0$.

b) Calculați $I_1$.

c) Folosind, eventual, inegalitatea $0\le\ln x\le 1$, valabilă pentru orice $x\in[1,e]$, demonstrați că $I_{2013}\ge I_{2014}$.

## Testul 8*

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că $i^6+\lg 1000=25^{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{-27}$.

**2.** Determinați toate numerele întregi $a$ care verifică inegalitatea $a^2+a-12<0$.

**3.** Demonstrați că graficele funcțiilor $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x^2+1)$ și $g(x)=-3^x$ nu se intersectează.

**4.** Calculați suma $2^6+C_6^1 2^5+C_6^2 2^4+C_6^3 2^3+C_6^4 2^2+C_6^5 2^1$.

**5.** Fie vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{w}=-3\vec{i}-2\vec{j}$. Demonstrați că $|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+2\vec{v}\cdot\vec{w}+2\vec{w}\cdot\vec{u}=0$.

**6.** Triunghiurile $ABC$ și $MNP$ au aceeași lungime a razei cercului circumscris, $BC=NP$, dar unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle M$ de măsuri diferite. Calculați suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle M$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră matricele $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$.

a) Calculați $B^2$.

b) Determinați numerele reale $x, y$ cu proprietatea $A=xI_2+yB$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Calculați $A^{20}$.

**2.** Considerăm polinoamele $f=X^4-3X^3+2X^2-5X+1$ și $g=X^2-X-1$.

a) Determinați restul împărțirii lui $f$ la $g$.





b) Dacă $x_1, x_2$ sunt rădăcinile lui $g$, calculați $x_1^2+x_2^2$.

c) Dacă $x_1, x_2$ sunt rădăcinile lui $g$, calculați $f(x_1)+f(x_2)$.

### Subiectul al III-lea

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției $f$.

c) Folosind, eventual, monotonia funcției $f$, demonstrați că $\frac{\sqrt{e}}{9}<\frac{\sqrt[3]{e}}{4}$.

**2.** Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției în jurul axei $Ox$.

b) Calculați $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

c) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

## Testul 9*

### Subiectul I

**1.** Demonstrați că numărul $(1-2i)(2+3i)+(2-3i)(1+2i)$ este întreg.

**2.** Demonstrați că $x^2-2(m+1)x+m^2+2m+2>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și $m\in\mathbb{R}$.

**3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_x(6x-5)=2$.

**4.** Determinați $x\in\mathbb{N}$, $x\ge 3$, cu proprietatea $A_x^3=2\cdot x$.

**5.** Fie triunghiul dreptunghic $ABC$ cu ipotenuza $BC$. Demonstrați relația $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=BC^2$.

**6.** Determinați toate numerele reale $x\in[0,2\pi]$ care sunt soluții ale ecuației $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

### Subiectul al II-lea

**1.** Pentru orice matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, notăm cu $Tr(A)=a+d$. De asemenea, fie mulțimea $\{U=X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\,|\,X^2=O_2\}$.

a) Demonstrați că, oricare ar fi $A, B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $Tr(A+B)=Tr(A)+Tr(B)$.

b) Demonstrați că, oricare ar fi $C \in U$, avem $Tr(C)=0$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $X,\ Y \in U$, avem $X+Y \neq I_2$.

**2.** Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea notată „$\odot$", definită prin $x \odot y = xy-2x-2y+6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $1 \odot 2 \odot 3 \odot 4$.

b) Demonstrați prin inducție matematică că $\underbrace{x \odot x \odot ... \odot x}_{n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați toate numerele reale $x$ care verifică egalitatea $\underbrace{x \odot x \odot ... \odot x}_{10 \text{ ori}} = 1026$.

## Subiectul al III-lea

**1.** Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(3x^2+e)$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați derivata funcției $f$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}$.

c) Demonstrați că graficul funcției $f$ nu admite asimptote.

**2.** Se consideră $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

a) Calculați $I_1$.

b) Calculați $I_2$.

c) Demonstrați că $I_1-I_3=\dfrac{1}{3}$.

# Testul 10*

## Subiectul I

**1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a$ dacă $a=\sqrt[3]{8}+\sqrt{7}$.

**2.** Dacă $x_1$ și $x_2$ sunt rădăcinile ecuației $x^2-(2m+1)x+m^2+m=0$, demonstrați că $(x_1-x_2)^2=1$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

**3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $0,2^{3x+1} \le 0,2^{2x+5}$.

**4.** Considerăm dezvoltarea $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{30}$, unde $x \in \mathbb{R}^*$. Determinați termenul care nu îl conține pe $x$.

**5.** Demonstrați că vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-a\vec{j}$ sunt perpendiculari, oricare ar fi numărul real $a$.





**6.** Demonstrați inegalitatea $\arcsin\dfrac{1}{2} < \operatorname{arctg} 1$.

## Subiectul al II-lea

**1.** Se consideră mulțimea $S=\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(X)=-1\}$.

a) Demonstrați că, oricare ar fi $A,\ B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem egalitatea $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.

b) Demonstrați prin inducție matematică că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ și $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $\det(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=\det(A_1)\cdot\det(A_2)\cdot ...\cdot\det(A_n)$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $C_1, C_2, ..., C_{2013} \in S$, avem $C_1C_2...C_{2013} \neq I_2$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^4-4X^3+2X^2+aX+b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valoarea numerelor reale $a$, $b$, știind că $f(2+i)=0$.

b) Pentru $a=12$ și $b=-15$, determinați toate rădăcinile complexe ale polinomului $f$.

c) Pentru $a=12$ și $b=-15$, descompuneți polinomul $f$ în factori ireductibili cu coeficienți reali.

## Subiectul al III-lea

**1.** Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=2x^2+1+\sqrt{3x+16}$.

a) Demonstrați că $f$ este strict crescătoare.

b) Determinați mulțimea valorilor funcției $f$.

c) Studiați dacă există numerele reale $a_1, a_2, ..., a_{400} \ge 0$ astfel încât $f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{400})=1999,976$.

**2.** Se consideră $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x^2+1}dx$.

a) Calculați $I_2$.

b) Demonstrați că $I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că $I_{2008}-I_{2012}=\dfrac{2}{2010^2-1}$.

# Soluții

## Clasa a IX-a

### 1. Mulțimi și elemente de logică matematică

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 31 | 1016 | A | A | (4, 3) | 3 | [3, 5) | $a=4$ | $-3$ și 7 |

**C1.** $2^3=8$. **C2.** 31 nevide $\Rightarrow$ 32 în total $\Rightarrow A$ are 5 elemente. **C3.** $2008+2008-1000=3016$. **C4.** $2^2=4$. **C5.** $p\wedge q$ e adevărată deoarece ambele propoziții sunt adevărate. **C6.** $2x+1$ divide pe 6, deci $2x+1\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}\Rightarrow A=\{-2,-1,0,1\}$. **C7.** $4x-2<2<2x+6\Rightarrow x\in(-2,1)$. **C8.** $12+25-7=30\Rightarrow$ 30 de elevi. **C9.** $A\setminus B=[2,5)\Rightarrow$ numărul 4. **C10.** $A\cup B=(-2,5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obține $a<c<b$. **C12.** $x-3\mid 2\Rightarrow x-3\in\{\pm1,\pm2\}\Rightarrow A=\{1,2,4,5\}$. **C13.** $\frac{11}{9}=1,2222...$, deci $P=2^{10}=1024$. **C14.** $\frac{13}{6}=2,16666...$, deci nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15}=1,53333...$, deci $S=5+3\cdot2008=6029$. **C16.** $A-B=(-3,1]\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Cardinalul mulțimii $(A\setminus B)\cap\mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a=7\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $b=9\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6\sqrt{2}=18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab}=\sqrt{18\cdot2}=6$. **C18.** Avem $x+4=1-2x$ și $x+4=2x-1$, de unde $x\in\{-1,5\}$. **C19.** $|2-\sqrt{5}|+|3-\sqrt{5}|=$ $=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1\in\mathbb{N}$. **C20.** $3x-2=\pm11\Rightarrow x\in\left\{\frac{13}{3},-3\right\}$. Dar $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right]=2$ și $\left\{\frac{11}{6}\right\}=\frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4<a<5$, deci $[a]=4$. **C23.** $b=5+\sqrt{25}\in(10,11)\Rightarrow[b]=10$. **C24.** $A=|\sqrt{2}-3|+|\sqrt{2}-1|=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}-1=2\in\mathbb{N}$. **C25.** $a=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{2}}{1-2}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}+\ ...\ +\frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}=$ $=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{100}}{-1}=\frac{1-10}{-1}=9\in\mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3}+\sqrt{25}=5+\sqrt{3}\in(6,7)$, deci $\left[\sqrt{3}+\sqrt{25}\right]=6$. Apoi $\sqrt{4}+\sqrt{19}=$ $=2+\sqrt{19}\in(6,7)$, deci $\left[\sqrt{4}+\sqrt{19}\right]=6$. **C27.** Pentru pasul de inducție avem $1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+$





$+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. **C28.** Pentru pasul de inducție avem: $\frac{1}{1\cdot3}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$ $=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$. **C29.** Presupunem prin reducere la absurd că $a=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este rațional $\Rightarrow a^2=12+2\sqrt{35}$ este rațional, adică $2\sqrt{35}=a^2-2$ este rațional, ceea ce este fals. **C30.** Numerele $2n-1$ și $2n+1$ sunt impare consecutive, deci nu au divizori comuni.

### 2. Șiruri. Progresii

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{21}{29}$ | 5 | 14 | 35 | 3 | 3 | $-5$ | 28 | 4 | 1000 |

**C1.** Avem $x_1+x_3+x_5+x_7=2+5+8+11=26$. **C2.** Din $4n-3=37$ obținem $n=10$. **C3.** $a_7=(a_9+a_5):2=50$. **C4.** $a_{10}-a_2=8r\Rightarrow r=1\Rightarrow a_1=6\Rightarrow a_{2008}=a_1+2007r=2013$. **C5.** $a_1+2r+a_1+3r=8\Rightarrow a_1=-1$. **C6.** $a_n=$ $=2+5(n-1)=5n-3$. Din $5n-3=2007\Rightarrow u=402\Rightarrow 2007$ aparține progresiei. **C7.** Avem $q=3$, deci $b_1=2$. **C8.** $q^2=147:3=49\Rightarrow q=-7$ și $a_2=-21$. **C9.** $x=\frac{2+x+4}{2}\Rightarrow 2x=x+6\Rightarrow x=6$. **C10.** $a_5=a_2q^3\Rightarrow$ $\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2\Rightarrow a_1=\frac{5}{2}$. **C11.** $b_1+b_2=4$ și $b_2+b_3=36\Rightarrow b_1(1+q)=4$ și $b_1q(1+q)=36\Rightarrow q=9$ și $b_1=0,4$. **C12.** $\frac{(x-1)+(3x+7)}{2}=\frac{4x+6}{2}=2x+3$ și concluzia. **C13.** $x(x-5)=36\Rightarrow x=9$. **C14.** $1+4+7+10+13+...+$ $+28+31=\frac{(1+31)\cdot11}{2}=176$. **C15.** Se obține $r=2$ și $a_1=2\Rightarrow a_{30}=60\Rightarrow S_{30}=\frac{(2+60)\cdot30}{2}=465$. **C16.** $q^2=$ $=24:6=4\Rightarrow q=2\Rightarrow b_1=3$. **C17.** $a_2+a_3=q(a_1+a_2)\Rightarrow q=4\Rightarrow a_1=1\Rightarrow a_1+a_2+a_3=1+4+16=21$. **C18.** $S_9=\frac{(2a_1+8r)\cdot9}{2}=9(a_1+4r)=9(a_1+8)\Rightarrow a_1=31$. **C19.** $d-a=a(q^3-1)=a(q-1)(q^2+q+1)$; $c-b=$ $=b(q-1)=aq(q-1)\Rightarrow\frac{q^2+q+1}{q}=\frac{7}{2}\Rightarrow q\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$. **C20.** $2+2^2+2^3+...+2^9=\frac{2^{10}-2}{2-1}=2^{10}-2=1022$. **C21.** $a_1+2007r=2(a_1+1007r)\Rightarrow a_1+7r=0\Rightarrow a_8=0$. **C22.** $a_{2010}=a_{2006}\cdot q^4\Rightarrow q^4=4\Rightarrow q^2=2\Rightarrow a_{2008}=6$. **C23.** $a_6+a_9+a_{12}+a_{15}=4a_1+38r=30\Rightarrow 2a_1+19r=15\Rightarrow a_1+a_{20}=15\Rightarrow S_{20}=150$. **C24.** $a_{2006}\cdot a_{2007}\cdot$ $\cdot a_{2008}=a_{2007}^3=27\Rightarrow a_{2007}=3$. **C25.** 60°. **C26.** $a^2+b^2=2ab\Rightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b$. **C27.** $S_{10}=55\Rightarrow a_1+a_{10}=$ $=11\Rightarrow 2a_1+9r=11$; $S_{12}=78\Rightarrow a_1+a_{12}=13\Rightarrow 2a_1+11r=13\Rightarrow r=1\Rightarrow a_1=1$. **C28.** $S=\frac{1-\frac{1}{2^{2009}}}{1-\frac{1}{2}}=2-$

$-\frac{1}{2^{2008}} \Rightarrow S \in (1, 2)$. **C29.** Pentru pasul de inducție avem $x_{k+1} = 3x_k - 2 = 3\left(3^k - 1\right) + 2 = 3^{k+1} + 2$. **C30.** $a_n = 2 + 3(n-1) = 3n - 1$. Ecuația $3n - 1 = 2008$ nu are soluția în $\mathbb{N}$, deci numărul 2008 nu va fi scris pe foaie.

## 3. Funcții

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-127$ | verificare | $\frac{1}{101}$ | verificare | $f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$ | $f(2) = 3$ | $(0, 1)$ | $-1$ | $x = -3$ | verificare |

**C1.** $f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -f(x)$. **C2.** Suma este zero. **C3.** Se verifică. **C4.** Se obține $f(x) = 0$. **C5.** Intersecția cu $Oy$ este dată de $(0, f(x)) = \left(0, \frac{1}{3}\right)$. Pentru intersecția cu $Ox$ avem $f(x) = 0$ și obținem $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$. **C6.** $f(2) = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1$. **C7.** 2009. **C8.** $a = 3$. **C9.** Se obține $c = -1$, $b = 1$, $a = 3$. **C10.** Se reprezintă punctele $(-1, -2)$; $(0, -1)$; $(1, 4)$. **C11.** Din $f(x) = x$ se obține punctul $(-1, -1)$. **C12.** $3x - 6 \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C13.** Avem $f(-1) = 4$. **C14.** Verificare. **C15.** $f(2) = 3 \Rightarrow a = 1$. **C16.** Verificare. **C17.** Din $f(x) = 0$ și obținem $(2, 0)$. **C18.** $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} =$ $= x + y > 0$. **C19.** $f(a) = \frac{a}{2} + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ nu convine; $f(a) = \sqrt{a - 1} = 2 \Rightarrow a = 5$. **C20.** De exemplu, $f(2) = 3$. **C21.** Avem succesiv $f(1) = 0$, $f(f(1)) = 0$, $f(f(f(1))) = 0$, $f(f(f(f(1)))) = 0$. **C22.** $g\left(f(x)\right) = 2x^2$. **C23.** Avem $g(f(x)) =$ $= x^2 - 2x + 2$ și $f\left(g(x)\right) = x^2$, deci nu sunt funcții egale. **C24.** $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \sqrt{2}$ și concluzia. **C25.** $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} =$ $= -\frac{1}{xy} < 0$. **C26.** $(f \circ f)(x) = x \Rightarrow S = 0$. **C27.** $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{xy - 1}{xy} > 0$, deci $f$ este strict crescătoare. **C28.** $f(x) =$ $= (x - 3)(x - 4) + 5$ este impar pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. **C29.** $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **C30.** $R_f < 0 \Rightarrow f$ e strict descrescătoare $\Rightarrow$ $\Rightarrow f(2\sqrt{3}) > f(3\sqrt{2})$.

## 4. Funcția de gradul I

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | verificare | $121 = 11^2$ | $a = 1$, $b = 2$ | verificare | $R_f = 2$ | $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ | verificare | $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ | $f(x) = 2x + 1$ |

**C1.** Suma este $2^8 - 2 + 7 \cdot 3 = 275$. **C2.** Verificare. **C3.** $3a - 5 + 3a + 3 - 5 = 10$, de unde $a = \frac{17}{6}$. **C4.** Se obține $b = 0$ și $a = 2$. **C5.** $f(a + 1) = 3a - 1$. **C6.** $f(a + 1) = a - 1 \Rightarrow a = 0$. **C7.** Din $f(x) = x$ obținem $(-1, -1)$. **C8.** Este





punctul $(3, 0)$. **C9.** Sunt punctele $(0,2)$ și $(0,-2)$ care sunt simetrice față de $Ox$. **C10.** Avem $A(4,0)$ și $B(0,-4) \Rightarrow OA = OB$. **C11.** $f$ este strict descrescătoare, deci valoarea minimă este $f(1) = 0$. **C12.** $x \in (1, \infty)$. **C13.** $3x - 4 - 1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$. **C14.** $3 - 4x - 1 \geq 4x \Rightarrow x \leq \frac{1}{4}$. **C15.** $3 < 2x + 11 < 15 \Rightarrow x \in (-4, 2)$. **C16.** $f(-1) =$ $= g(-1) \Rightarrow -a + b = -b + a \Rightarrow a = b$ și apoi concluzia. **C17.** $A(-2; 0)$, $B(0; 6) \Rightarrow$ aria este egală cu 6. **C18.** $f(x) =$ $= g(x) \Rightarrow x = \frac{5}{2 - a}$; ecuația nu are soluții pentru $a = 2$. **C19.** $f(x) \leq g(x) \Rightarrow x \leq 0$. **C20.** $A(4, 0)$; $B(0, 4) \Rightarrow OA =$ $= OB$. **C21.** $R_f = m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$. **C22.** $(f \circ g)(x) = 2 - 2x$ și concluzia. **C23.** Condițiile sunt $b > 0$ și $f(b) <$ $< 0 \Rightarrow b \in \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$. **C24.** $x > 0$ și $f(x) < 0$ simultan nu se poate. **C25.** $R_f = -7 < 0 \Rightarrow f$ descrescătoare. Cum $3\sqrt{3} <$ $< 2\sqrt{7} < 4\sqrt{2} \Rightarrow f(4\sqrt{2}) < f(2\sqrt{7}) < f(3\sqrt{3})$. **C26.** Intersecțiile cu axele sunt $A(3; 0)$ și $B(0; -6) \Rightarrow OA = 3$, $OB =$ $= 6$, $AB = 3\sqrt{5}$. Distanța este egală cu $\frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. **C27.** Din tabelul de semn se obține $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$. **C28.** Dacă $f(x) = ax + b \Rightarrow (f \circ f)(x) = a^2x + ab + b \Rightarrow a = 2$ și $b = 1$. **C29.** Din tabelul de semn se obține $x \in (-3, 2]$. **C30.** Inecuația este echivalentă cu $\frac{x + 9}{2x - 8} < 0 \Rightarrow x \in [-9, 4)$.

## 5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | verificare | $V(4, -7)$ | $x_1 = -1$ $x_2 = -8$ | $(0, 0)$ $(-1, 1)$ | $(-\infty, -3] \cup$ $\cup [-1, \infty)$ | $-\frac{1}{2}$ | $m = 8$ | $c = 3$, $b = 2$, $a = 1$ |

**C1.** $f_{max} = y_V = 0$. **C2.** $x = 1$. **C3.** $V\left(-\frac{5}{2}, -\frac{21}{4}\right)$. **C4.** Prin substituție se obțin soluțiile $(0, 1)$ și $(1, 3)$. **C5.** $\frac{m + 2}{2(m + 1)} =$ $= 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$. **C6.** $-\frac{\Delta}{4a} = -5 \Rightarrow \frac{64 - 12m}{4m} = 5 \Rightarrow m = 2$. **C7.** $V(1, 4)$. **C8.** $\Delta = 5 - 8 < 0$. **C9.** $\Delta = (m + 1)^2 -$ $-4m = (m - 1)^2 > 0$. **C10.** a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$. Din calcul obținem $x = 1$; b) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Din calcul $x_{1,2} = 1 \pm$ $\pm \sqrt{5}$. **C11.** $\Delta > 0 \Rightarrow m < 4$. **C12.** $x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ propoziție falsă. **C13.** $x^2 + 4x -$ $- 5 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [1, \infty)$. **C14.** $x \in [-1, 0]$. **C15.** Se obțin soluțiile $(1, 3)$ și $(3, 1)$. **C16.** Din $x^2 + 3x +$ $+ 2 \neq 0$ obținem $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. **C17.** Se obține $R_f = 10 - x - y < 0$ și concluzia. **C18.** $2m = m + 1 \Rightarrow m = 1$. **C19.** $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 = 1 + 7 = 8$. **C20.** $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 36 - 12 = 24$. Deci $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} =$ $= \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{24}{6} = 4$. **C21.** $\Delta > 0 \Rightarrow a \in \left(1; \frac{13}{5}\right)$. **C22.** $m - 1 < 0$ și $m^2 - 3m > 0 \Rightarrow m \in (-\infty, 0)$. **C23.** $\frac{2x - 1}{1 - x} -$

$\frac{3x+2}{1-2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x^2+3x-3}{(1-x)(1-2x)} \geq 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. **C24.** Intersecția cu $Ox$ este dată de punctele $A(m, 0)$, $B(-m, 0) \Rightarrow AB = 2m \Rightarrow m = 1007$. **C25.** $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ și apoi deducem concluzia. **C26.** $\frac{2x+3}{x^2+x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{-x^2+x+2}{x^2+x+1} \geq 0 \Rightarrow S = [-1, 2]$. **C27.** Prin metoda substituției obținem soluția $(1, 1)$. **C28.** Avem $y_V \geq 0 \Rightarrow m \geq -2$. **C29.** Avem $x^2 + 2x + m \geq 0$ pentru orice $x$ real $\Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow m \geq 1$. **C30.** $A(0, m^2 - 4m + 5)$. Cum $m^2 - 4m + 5 \geq 1 \Rightarrow$ minimul segmentului $OA$ este 1.

## 6. Vectori în plan

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | $2\sqrt{2}$ | verificare | verificare | verificare | verificare | 10 | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ |

**C1.** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = 0 \Rightarrow$ modulul este nul. **C2.** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} = 0$. **C3.** $ANMP$ este paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{AN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt vectori opuși. **C4.** $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = 0 \Rightarrow x = 2$. **C5.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, deci $\vec{w} = 3\overrightarrow{AC}$ și $|\vec{w}| = 18\sqrt{2}$. **C6.** $NMAP$ este paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA}$. **C7.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **C8.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$. **C9.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$, deci modulul este egal cu 20. **C10.** Avem $PB = 3PA$, deci $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 0$, adică $x = 3$. **C11.** Din regula triunghiului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{MR}$ și $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$. **C12.** $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 0$ ca sumă de vectori opuși. Analog, $\vec{v} = 0$. **C13.** $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ și $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$, iar concluzia se obține deoarece diagonalele unui dreptunghi sunt egale. **C14.** $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} = 0$, deci $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}$ și $|\overrightarrow{MA}| = \frac{BC}{2} = 6$. **C15.** Dacă $O$ reprezintă intersecția diagonalelor, atunci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$. **C16.** $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NB}$. **C17.** $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = (x-1)\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow x = 1$ și $y = 1$. **C18.** $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$ și apoi se adună cele două relații. **C19.** $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$, deci $a = b = \frac{1}{2}$. **C20.** $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}}{2} + \frac{\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}}{2} + \frac{\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}}{2}$ etc. **C21.** Fie $O$ centrul hexagonului. Atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = 0$. **C22.** Sunt vectori opuși. **C23.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = 0$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = 0$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = 0$. **C24.** Fie $O$ intersecția diagonalelor. Atunci $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ modulul căutat este egal cu 10. **C25.** Avem $\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}}{2} = \frac{2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{4}$. Apoi, din $\frac{PC}{PA} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BP}$ și concluzia. **C26.** $\Delta ABD$ este echilateral. Apoi $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ și $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. **C27.** $\vec{u} = 2\overrightarrow{BP}$ și $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BP}$ și de





aici concluzia. **C28.** $MSTQ$ și $NSTP$ sunt paralelograme, deci $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{ST}$ și $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{ST}$. **C29.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FD}$ și $ACDF$ este dreptunghi. **C30.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$, deci modulul căutat este $9\sqrt{2}$.

## 7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{5}$ | 24 | calcul | $\frac{\sqrt{5}}{3}$ | verificare | verificare | $2\sqrt{37}$ | $\frac{2}{3}$ | verificare | verificare |

**C1.** *i*. **C2.** $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$ și $\frac{\cos C}{\sin C} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$. **C3.** $\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC}$, deci $AC = AB$. **C4.** $BD \cdot \operatorname{tg} B = BD \cdot \frac{AD}{BD} = AD$. Analog, $CD \cdot \operatorname{tg} C = AD$. **C5.** $\sin B + \cos C = \cos B + \sin C \Rightarrow \frac{AC}{BC} + \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} + \frac{AB}{BC} \Rightarrow AC = AB$. **C6.** $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$, deci $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ = 1$. **C7.** $\sin 10^\circ - \sin 170^\circ = 0$, $\sin 50^\circ - \sin 130^\circ = 0$. **C8.** $\cos 55^\circ = \sin 35^\circ$. **C9.** $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{16 + 36 - 64}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4}$. **C10.** $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{25 + 49 - 39}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{2}$, deci unghiul are măsura de $60^\circ$. **C11.** $BC^2 = 64 > AB^2 + AC^2$ și rezultă concluzia. **C12.** $\sin 137^\circ = \sin 43^\circ$, deci $\sin^2 137^\circ + \cos^2 43^\circ = \sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ = 1$. **C13.** Obținem $AB = 6$ și apoi $AC = 8$, deci perimetrul este egal cu 24. **C14.** $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \sin C \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} BC^2 \sin B \sin C$. **C15.** $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 2 \Rightarrow \frac{AC}{AB} + \frac{AB}{AC} = 2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 2AB \cdot AC \Rightarrow (AB - AC)^2 = 0 \Rightarrow AB = AC$. **C16.** $\cos 123^\circ < 0$, $\cos 56^\circ > 0$. **C17.** $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2 + AC^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{AC^2}{100} = \frac{9}{25} \Rightarrow AC^2 = 36 \Rightarrow AC = 6 \Rightarrow AB = 8 \Rightarrow \mathcal{P}_{ABC} = 24$. **C18.** $\sin C = \frac{AB}{2R} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 45^\circ$. **C19.** $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{8}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 8$.

**C20.** $m(\sphericalangle C) = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 120^\circ$ și $AB = 2R \sin C = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. **C21.** $\cos x = -\frac{12}{13}$. **C22.** $\sin x = \frac{3}{5}$. **C23.** Avem $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{56}{65}$. **C24.** $1 - 2\sin^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. **C25.** $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin a \cos\frac{\pi}{2} = 0$. **C26.** Verificare. **C27.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 18$. **C28.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B = BA \cdot BC \cdot \frac{BA}{BC} = 16$. **C29.** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AD} \cdot (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$. **C30.** Se aplică relația $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$.

# Clasa a X-a

## 1. Numere reale

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | $b<a<c$ | $13=13$ | $2<3$ | verificare |

**C1.** $3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-5\sqrt{2}+6\sqrt{2}=0$. **C2.** $2\sqrt{14}-\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{10\sqrt{14}}{7}=\frac{\sqrt{14}}{14}$. **C3.** $\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{2}$, $=\sqrt[3]{250}=5\sqrt[3]{2}$. **C4.** Verificare. **C5.** $\lg 90=\lg 3^2\cdot 10=2a+1$. **C6.** $\log_2\frac{12\cdot 14}{21}=\log_2 8=3$. **C7.** $a=2+2+3=7$. **C8.** $\lg\frac{2}{1}+\lg\frac{3}{2}+\ldots+\lg\frac{10}{9}=\lg\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{9}=1$. **C9.** $1331^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[3]{1331}\right)^2=121$. **C10.** $a=2^{33}=8^{11}$, $b=3^{22}=9^{11}\Rightarrow$ $\Rightarrow a<b$. **C11.** $3\sqrt{2008}<2008\sqrt{3}$. **C12.** $b-a=\log_2\frac{6}{3}=1$. **C13.** $\lg\frac{12\cdot 15}{18}=1$. **C14.** $\log_4 9=\log_2 3$, $\log_8 27=$ $=\log_2 3$. **C15.** $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8=\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 2^3}{\lg 5}=3$. **C16.** $a=\frac{\log_3\sqrt{3}}{\log_3 9}+\frac{\log_2\sqrt[3]{2}}{\log_2 4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}\in\mathbb{Q}$.

**C17.** $\log_2(5+\sqrt{7})(5-\sqrt{7})-\log_2 9=\log_2 2=1$. **C18.** $\log_{2\sqrt{2}}3\sqrt{3}=\frac{\log_2 3\sqrt{3}}{\log_2 2\sqrt{2}}=\frac{\log_2 3^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\log_2 3$. **C19.** $4=$ $=\log_5 625<\log_5 2007$. **C20.** Verificare. **C21.** $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}=\sqrt{2}+1\Rightarrow\frac{b}{a}-\sqrt{2}=1$. **C22.** $a=3$, $b=2$. **C23.** $2=\log_2 4>\log_2 3$; $\frac{3}{2}=\log_2 2^{\frac{3}{2}}=\log_2\sqrt{8}<\log_2 3$. **C24.** $\sqrt{3}+\sqrt{9}<\sqrt{5}+\sqrt{7}\Leftrightarrow 3+2\sqrt{27}+9<5+$ $+2\sqrt{35}+7\Leftrightarrow\sqrt{27}<\sqrt{35}$. **C25.** $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt[3]{3}\Rightarrow a^6=8$, $b^6=9\Rightarrow a<b$. **C26.** $2=\log_3 9>\log_3 4$; $2=\sqrt{4}<\sqrt{5}$. **C27.** $\log_3 5\cdot\log_5 9=2=\sqrt[3]{8}<\sqrt[3]{9}$. **C28.** $100^{\lg 2}=4$; $\sqrt[3]{-27}=-3$. **C29.** $\log_{12}18=\frac{\log_3 18}{\log_3 12}=$ $=\frac{a+2}{2a+1}$. **C30.** $\log_3 7>1>\log_7 3$.

## 2. Funcții și ecuații

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Se utilizează definițiile. | $a=2$, $b=1$ | $f(g(x))=x$ $g(f(x))=x$ | verificare | $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ | $\frac{16}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\left(\frac{7}{4},\infty\right)$ | verificare | $\frac{5}{2}$ |





**C1.** 2. **C2.** $n\in\{0,1,2\}$. **C3.** Se aplică definițiile. **C4.** $x^2-4x+3\geq 0\Rightarrow D=(-\infty,-1]\cup[3,\infty)$. **C5.** 3. **C6.** Este echivalent cu $\sqrt{\frac{13}{2}}>\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{26}>5$. **C7.** $f(x)=f(y)\Rightarrow 3x-4=3y-4\Rightarrow x=y$. **C8.** $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{3x}{2x-2}=$ $=\frac{3y}{2y-2}\Rightarrow x=y$. **C9.** $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\operatorname{Im}f=[0,\infty)$ și concluzia. **C10.** $g(3)=x\Rightarrow f(x)=3\Rightarrow x=1$. **C11.** $f^{-1}(y)=$ $=\sqrt{y-1}$. **C12.** $f(8)=\sqrt[3]{9}$, $f(26)=\sqrt[3]{27}=3$; $f(124)=\sqrt[3]{125}=5$ și apoi se obține concluzia. **C13.** $G_f\cap O_x=$ $=\{(-1,0)\}$, $G_f\cap O_y=\{(0,2)\}$. **C14.** a) $x=25$; b) $x\in\{-1;2\}$; c) $x=4$; d) $x\in\{-1;2\}$. **C15.** a) $x=-\frac{1}{3}$; b) $x=-2$; c) $x=1$; d) $x\in\{-2;3\}$; e) $x\in\{1;3\}$; f) $x=-1$. **C16.** a) $x\in\{2;-2\}$; b) $x=3$. **C17.** $6^x=36\Rightarrow x=2$. **C18.** $\lg\sqrt{x}=\frac{\lg x}{2}$; $x=100$. **C19.** $x=27$. **C20.** $x=1$. **C21.** Funcția nu este surjectivă. **C22.** Verificare cu definiția. **C23.** $f^{-1}(y)=\frac{2y}{2-3y}$. **C24.** a) $x=2$; b) $x=2$; c) $x=2$. **C25.** a) $2^x=2\Rightarrow x=1$; b) $2^x=t$; $x\in\{0;1\}$; c) $2^x=t\Rightarrow x=1$; d) $3^x=t$; $x=1$. **C26.** $\sqrt{x}=t\Rightarrow t^2-2=-t\Rightarrow t\in\{1,-2\}\Rightarrow x=1$. **C27.** a) $x=9$; b) $x=6$; c) $x=3$; d) $x=4$; e) $x=3$. **C28.** a) $\lg x=t$; $x\in\{10;1000\}$; b) $x=4$; c) $x=8$. **C29.** $\frac{3^x-1+5\cdot 3^x+1}{2}=3\cdot 3^x=3^{x+1}$. **C30.** Fie $2^a=b$; $1+b^2=\frac{b+4b}{2}\Rightarrow b\in\left\{2;\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow a\in\{1;-1\}$. **C31.** $4^x+2^x+4=10\Rightarrow x=1$. **C32.** $\frac{2\pi}{3}$. **C33.** $E^2(x)=1+\sin 2x\leq 2$, deci valoarea maximă este $\sqrt{2}$. **C34.** Se verifică relația $f(x+\pi)=f(x)$. **C35.** $f(0)=$ $=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. **C36.** $-7\leq f(x)\leq 7$, deci $\operatorname{Im}f\neq[-8,8]$. **C37.** $f(x)>0$ pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **C38.** a) $x\in$ $\in\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $x\in\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $x\in\{k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $x\in\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cup$ $\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C39.** Din $4x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ cu $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$. Dar $x\in[0,\pi]$, deci $x\in\left\{\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right\}$. **C40.** Notația $\cos x=t$ conduce la $t\in\{2,3\}$, ceea ce nu este posibil.

## 3. Probleme de numărare și combinatorică

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-2)^2$ | calcul | 10 | $12\cdot 16$ | 29 | calcul | $C_5^3=15$ | $P_4=24$ | $A_4^2=12$ | $T_3=60x^3$ |

**C1.** $26=9+9+8\Rightarrow 3$ numere. **C2.** $3^4=81$. **C3.** $4\cdot 3\cdot 2=24$. **C4.** $5\cdot 4\cdot 3=60$ de moduri. **C5.** $120=5!\Rightarrow$ $\Rightarrow 5$ cărți. **C6.** $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3=1+5+10+10=26$. **C7.** $C_6^4=15>C_6^5=6$. **C8.** $f(b)=f(c)=2\Rightarrow 2$ funcții. **C9.** $4\cdot 3\cdot 2=24$ funcții. **C10.** $4\cdot 3\cdot 2=24$ funcții. **C11.** $A_6^4=360$ numere. **C12.** a) $\frac{11}{10}$; b) 0; c) 12.

**C13.** $\frac{7!+8!}{6!}=7+56=63$. **C14.** Verificare. **C15.** $C_6^3=20$, $C_5^3=10$. **C16.** $C_4^1+C_4^3=8$. **C17.** $C_9^2=36$. **C18.** $4, 5 \in X \Rightarrow X$ se completează eventual cu elemente dintre 1, 2 și $3 \Rightarrow 2^3$ soluții $\Rightarrow 8$ soluții. **C19.** $C_4^3=4$. **C20.** $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$. **C21.** Forma $\overline{ab0}$ e posibilă de $5 \cdot 4 = 20$ de ori, iar forma $\overline{ab5}$ e posibilă de $4 \cdot 4 = 16$ ori $\Rightarrow 36$ de numere. **C22.** $\frac{(n+2)!}{n!}=(n+1)(n+2)=12 \Rightarrow n=2$. **C23.** $\frac{n!}{(n-k)!k!}:\frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}=\frac{k+1}{n-k}$. **C24.** $C_n^2=10 \Rightarrow n=5$.

**C25.** $1+n=2012 \Rightarrow n=2011$. **C26.** $x=5$. **C27.** $T_4=C_{10}^3(2x)^7\cdot(\sqrt[3]{x})^3=C_{10}^3\cdot 2^7\cdot x^8$. **C28.** $T_{13}=C_{60}^{12}\left(\sqrt{2}\right)^{48}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^{12}=C_{60}^{12}\cdot 2^{28}\in\mathbb{N}$. **C29.** $T_{k+1}=C_{12}^k\left(\sqrt[3]{a}\right)^{12-k}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^k \Rightarrow \frac{12-k}{3}-\frac{k}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow k=6 \Rightarrow T_7=C_{12}^6\sqrt{a}$. **C30.** $T_{k+1}=C_{200}^k(\sqrt[3]{x})^{200-k}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k$, de unde obținem $\frac{200-k}{3}-\frac{k}{2}=0 \Rightarrow k=80 \Rightarrow T_{81}=C_{200}^{80}\cdot 2^{80}$.

## 4. Matematici aplicate. Probabilități

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | 25 | 180 lei | 40 lei | 496 lei | 206 lei | 242 lei | $\frac{6}{90}$ | $\frac{15}{16}$ | $\frac{2}{6}$ |

**C1.** 5%. **C2.** 10%. **C3.** 400 lei. **C4.** 220 lei după prima scumpire și 231 lei la final. **C5.** Prețul inițial este 200 lei, iar cel final 222 lei. **C6.** 98,1 lei. **C7.** 38 lei. **C8.** $p=8$. **C9.** 12,5%. **C10.** 8%. **C11.** 12% pe an înseamnă 240 lei, deci suma inițială a fost 2000 lei. **C12.** Suma finală este 121% din cea inițială, care a fost de 2000 lei. **C13.** $S=\left\{\frac{1}{4}, 1\right\} \Rightarrow P=\frac{1}{2}$. **C14.** $P=\frac{3}{900}$. **C15.** Se obține $\frac{2}{5}$ prin analiza tuturor posibilităților. **C16.** Sunt 900 numere de trei cifre și $9 \cdot 9 \cdot 8$ cu cifre distincte. Avem $P=\frac{72}{100}$. **C17.** $P=\frac{C_5^2}{2^5}=\frac{5}{16}$. **C18.** $P=\frac{C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3}{2^4}=\frac{15}{16}$. **C19.** $\frac{1}{4}$. **C20.** $\frac{3}{4}$. **C21.** Fie $p$ prețul inițial. Atunci $p+10\%p+5\%(p+10\%p)=231 \Rightarrow p=200$ lei. **C22.** Prețul final este 90% din 110% din cel inițial $\Rightarrow$ 99%. **C23.** Doar 85% sunt sportivi. Cum 40% + 50% − 85% = 5% $\Rightarrow$ 5% practică ambele sporturi. **C24.** Au fost prezenți 80% și au luat testul 75% dintre aceștia, adică 60% din total. **C25.** În total, banca a oferit $3 \cdot 2\% + 7 \cdot 1\% = 13\%$ pentru 10 luni, adică 1,3% pe lună. **C26.** Avem $1000(1+p\%)^2=1440 \Rightarrow p=12$. **C27.** Numerele cu două cifre egale au forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$ și sunt $3 \cdot 81 = 243 \Rightarrow P=\frac{3 \cdot 81}{9 \cdot 10 \cdot 10}=\frac{27}{100}$. **C28.** Sunt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ funcții, din care $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ sunt injective $\Rightarrow P=\frac{24}{125}$. **C29.** Pentru 5 elevi sunt $C_{29}^5$ posibilități de alegere. Fiind 3 băieți, atunci vom avea 2 fete, deci $C_{18}^3 \cdot C_{11}^2$ moduri $\Rightarrow P=\frac{C_{18}^3 \cdot C_{11}^2}{C_{29}^5}$. **C30.** Sunt $2^6-1$ submulțimi impare. Sunt $2^3-1$ submulțimi cu toate elementele impare $\Rightarrow P=\frac{2^3-1}{2^6-1}=\frac{7}{63}=\frac{1}{9}$.





## 5. Geometrie analitică

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (3, 8) | $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ | 5 | $x_A+x_C=$ $=x_B+x_D$ etc | verificare | $m=-\frac{1}{2}$ la ambele | $a=1$, $b=2$ | calcul | 10 | $2\sqrt{10}$ |

**C1.** $C(0, 9)$. **C2.** $AB=AC=\sqrt{13}$. **C3.** Verificare. **C4.** $x_D=x_A+x_C-x_B=-1$, $y_D=y_A+y_C-y_B=10$. **C5.** $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=-n$ și $\log_3 9^n=2n$. **C6.** $(-2, -4)$. **C7.** Calcul. **C8.** $2a+1=-1$ și $b+1=3 \Rightarrow a=-1$, $b=2$. **C9.** $\frac{a-2}{8}=\frac{3}{2a-20} \Rightarrow a \in \{-2; 5\}$. **C10.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=2\vec{i}+3\vec{j}$. **C11.** $G(4, 3) \Rightarrow \overrightarrow{AG}=4\vec{i}+3\vec{j}$ etc. **C12.** $\overrightarrow{OC}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{i}+5\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j} \Rightarrow C(4, 4)$. **C13.** $b=-2$; $a=1$. **C14.** $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ și $(7, 0)$. **C15.** Mijlocul are coordonatele $(2, 1) \Rightarrow$ ecuația $y=\frac{1}{2}x$. **C16.** $x-2y-6=0$. **C17.** $d(A, d)=\frac{|3+4+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$. **C18.** $G(1, 2) \Rightarrow$ ecuația $y=2x$. **C19.** $(1, 2)$. **C20.** $B(1, 0)$, $C(0, 3) \Rightarrow BC=\sqrt{10}$. **C21.** $B(2, -3)$, $C(-2, 3) \Rightarrow BC=2\sqrt{13}$. **C22.** $p+q=6$, $p-q=2 \Rightarrow p=4$, $q=2$. **C23.** $d_1 \cap d_2=\{(1; -1)\} \Rightarrow a=0$. **C24.** Este paralelogram cu diagonale congruente și perpendiculare. **C25.** Mijlocul lui $AB$ are coordonate $(0, 1)$. $m_{AB}=\frac{-1-3}{1+1}=-2 \Rightarrow$ ecuația mediatoarei este $y=\frac{1}{2}x+1$. **C26.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(4\vec{i}+2\vec{j})(-2\vec{i}+4\vec{j})=0$. **C27.** $a=4$. **C28.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v})=\frac{3}{\sqrt{130}}$. **C29.** Se obține $a \in \{3; 6\}$. **C30.** Verificare.

## 6. Numere complexe*

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x=2$ | $-3+4i$ | $i$ | $i$ | calcul | $a=-5$, $b=12$ | $z=\frac{3}{7}i$ | $3 \pm i$ | $2\sqrt{5}$ | 5 |

**C1.** a) $i$; b) 0. **C2.** a) $8+4i$; b) $\frac{64}{65}$; c) $-1$. **C3.** $-\frac{8}{5} \in \mathbb{R}$. **C4.** a) $-4 \in \mathbb{Z}$; b) $2^{12} \in \mathbb{R}$. **C5.** $\frac{1}{5}$. **C6.** $a=-8$; $b=0$. **C7.** 22. **C8.** $x=1$, $y=2$. **C9.** $a \in \{2; -2\}$. **C10.** $a \in \{1; -2\}$. **C11.** Verificare. **C12.** a) $z=1-4i$; b) $z=i$; c) $z=3+4i$. **C13.** $z \in \left\{0, 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **C14.** a) $|z_1|=5\sqrt{2}$; b) $|z_2|=\sqrt{6}$; c) $|z_3|=1$. **C15.** $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z^{2009}|=|z|^{2009}=1$. **C16.** $-1$. **C17.** a) $S=\left\{\frac{-1 \pm 2i}{2}\right\}$; b) $S=\{4 \pm i\}$. **C18.** $S=\{2, -1 \pm i\sqrt{3}\}$. **C19.** a) Cu

notația $x^2 = t$ obținem $S = \{\pm 3,\ \pm 2i\}$; b) Cu notația $x^3 = t$ obținem $S = \left\{-2,\ 1 \pm i\sqrt{3},\ 1,\ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

**C20.** $\frac{z^2 \cdot \overline{z} + 11 \cdot \overline{z}}{11} = \frac{z^2 + 11}{z} = z \cdot \overline{z} = 11 \Rightarrow \frac{11z + 11\overline{z}}{11} = z + \overline{z} \in \mathbb{R}$. **C21.** Verificare cu ajutorul formei algebrice. **C22.** Avem $\varepsilon^2 = 1$ și $(1+\varepsilon)^{12} + (1+\varepsilon^3)^{24} = (-\varepsilon^2)^{12} + (-\varepsilon)^{24} = \varepsilon^{24} + \varepsilon^{24} = 2$. **C23.** $G(2 + 5i)$. **C24.** $C(2 - 6i)$. **C25.** $\mathcal{P} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$. **C26.** Se demonstrează că $XY = WZ$, $XW = YZ$ și $XZ = YW$. **C27.** $z_A + z_C = z_B + z_D \Rightarrow z_D = 5i$. **C28.** Se obține $BC = AB + AC$. **C29.** $z_M = 5 + 4i$, deci $AM = 3\sqrt{2}$. **C30.** $z_G = 4 + 3i \Rightarrow z_M = 6 + 5i$.

# Clasa a XI-a

## 1. Matrice

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 4$<br>$b = 7$ | $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ -9 & 15 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | calcul | Ambele sunt egale cu 7. | 5 | calcul | 2 |

**C1.** $A = B \Leftrightarrow 2a + 5 = 7,\ 3a + 2 = 8 \Rightarrow a = 1$ și $a = 2$, imposibil. **C2.** Se verifică prin calcul. **C3.** $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, unde, $m = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^5 = \frac{2^6 - 2}{2 - 1} = 62$, $n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot 5 = 2(1 + 2 + \ldots + 5) = 2 \cdot 15 = 30$, $p = \underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{5 \text{ ori}} = -5$. Atunci $B = \begin{pmatrix} 62 & 30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ și suma elementelor este 87. **C4.** Se verifică prin calcul. **C5.** Din $2X - AB = A \Rightarrow a = -8$, $b = 9$, $c = -3$ și $d = 1$. Atunci $a + b + c + d = -1$. **C6.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 6I_3$. **C7.** $A^2 = 6A \Rightarrow d = 6$. **C8.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3$, pentru orice $k \geq 3$, deci $A + A^2 + \ldots + A^{20} = A + A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C9.** $A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $S = 17$. **C10.** $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C11.** Se demonstrează că $A^2 = A$, atunci $A^k = A,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $A^{2012} - A^{2011} = A - A = O_2$. **C12.** $3a = 12 \Rightarrow a = 4$. **C13.** Se rezolvă sistemul astfel obținut și rezultă $a = -3$, $b = c = 2$ și $d = -1$. **C14.** Se verifică prin calcul. **C15.** Se verifică prin calcul. **C16.** Se





verifică prin calcul. **C17.** Din $a + b + c + d = 10$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, distincte $\Rightarrow \{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci numărul matricelor este $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. **C18.** Se rezolvă sistemul și se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -5 & -13 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. **C19.** Se verifică prin calcul. **C20.** $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^{2014} = (A^2)^{1007} = (-I_2)^{1007} = -I_2$.

## 2. Determinanți

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2, -2, 4$ | $24, -90, 22$ | calcul | calcul | calcul | calcul | 0 | 2 | $3, -2$ | $\det(A) = \det(B) = 0$ |

**C1.** $A^2 = A$, deci avem $\det(I_2 + 3A) = 4$. **C2.** $D = 1$. **C3.** $\det(A \cdot B) = 0$. **C4.** $\det(A - xI_2) = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(8 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 8$. **C5.** Se verifică prin calcul. **C6.** $\det(A) = 1$, deci nu depinde de $a$. **C7.** Se verifică prin calcul direct. **C8.** Se verifică prin calcul direct. **C9.** $x^2 - 7 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x = -8$. **C10.** Se verifică prin calcul direct. **C11.** Calculul determinantului este $x^2 - 2x - 3$. De aici, $x_1 = -1$; $x_2 = 3$. **C12.** Ecuația are rădăcini pe 1 și 3. Rezultatul se obține acum prin calcul direct. **C13.** Se verifică prin calcul direct. **C14.** Determinantul este egal cu $-5$. **C15.** $f(x) = -2 \Rightarrow f(a) = f(b) = -2,\ \forall a, b \in \mathbb{R}$. **C16.** $\det A = 0 \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$; $\det B = 0 \Rightarrow \frac{a}{m} = \frac{c}{p} \Rightarrow \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \Rightarrow \det C = 0$. **C17.** Relația de demonstrat se reduce la $x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \geq 1 \Leftrightarrow m^2 \geq 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$. **C18.** $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2m)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2m$, iar determinantul este 0. **C19.** Se verifică prin calcul. **C20.** $\det(A) = x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3 \geq 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

## 3. Aplicații ale determinanților în geometrie

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta = 2$ și $A = 1$ | $\Delta = 0$ | $x + y = 1$ | $\Delta \neq 0$ | $y = \frac{3}{2}x$ | calcul | 4 | arii egale cu 1 | verificare | $\lvert\Delta\rvert = 4$ și $A = 2$ |

**C1.** $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 15$. **C2.** $M$ – mijlocul segmentului $BC \Leftrightarrow x_M = 7$; $y_M = -2$. $\mathcal{A}_{\Delta ABM} = \mathcal{A}_{\Delta ACM} = 21$. **C3.** $AB: 2x - y + 1 = 0$. **C4.** $M$ – mijlocul segmentului $BC \Leftrightarrow x_M = 7$; $y_M = -2$. $AM: 2x + 3y - 8 = 0$. **C5.** $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow A, B, C$ coliniare. **C6.** $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 6$, nu depinde de $m$. **C7.** $\mathcal{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = 1$. **C8.** $A_n \in A_1A_2 \Leftrightarrow A_1, A_2, A_n$ – coliniare. Se verifică calculul. **C9.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ a & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, de unde $a \in \{-1, 3\}$. **C10.** $C_1$, $C_2$, $C_p$ necoliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ p & p^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Se verifică

calculul. **C11.** $A, B, C$ coliniare $\Leftrightarrow x=4$. **C12.** $\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{\Delta BCD}+\mathcal{A}_{\Delta BDA}=\frac{29}{2}+\frac{11}{2}=20$. **C13.** $O\in AB\Leftrightarrow O$, $A$, $B$ coliniare. Se verifică calculul. **C14.** Demonstrăm că $C, D\in AB$. $AB: -x+y-1=0$. Coordonatele punctelor $C$, $D$ verifică ecuația dreptei $AB$. **C15.** $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=1$, nu depinde de $m$. **C16.** $B_p, B_q, B_r$ coliniare $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix} p+1 & 2p & 1\\ q+1 & 2q & 1\\ r+1 & 2r & 1\end{vmatrix}=0$. Se verifică calculul. **C17.** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|-2a+28\right|\Rightarrow\left|-2a+28\right|=12\Leftrightarrow a_1=8; a_2=20$.

**C18.** $A, B, C$ necoliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x & 2x & 1\\ x-1 & 2x-2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Se verifică calculul. **C19.** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\left|m^2-4m+6\right|=$

$=\left|(m-2)^2+2\right|$. Valoarea minimă se obține pentru $m=2$. **C20.** $f(x)=\mathcal{A}_{\Delta ABC}=2\left|-x^2+4x\right|=2\left|4-(x-2)^2\right|$. Valoarea maximă se obține pentru $x=2$, aceasta fiind 8.

## 4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A\cdot B=$ $=B\cdot A=$ $=I_2$ | $A\cdot B=$ $=B\cdot A=$ $=I_3$ | $\det A=0$ | $\det A\neq 0$ | $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2}$. | $\mathbb{R}\setminus\{9\}$ | $\det(AB)=0$ | $\det D\neq 0$ | $X=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 6 & 8\end{pmatrix}$ |

**C1.** Avem $A^2\cdot A=A\cdot A^2=I_2$. **C2.** $A\cdot B=B\cdot A=I_2$. **C3.** $B$ inversabilă $\Leftrightarrow \det B\neq 0$; $\det B=11\neq 0\Rightarrow B$ inversabilă. $B\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)B\Leftrightarrow (I_3+A)\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)(I_3+A)=I_3$. **C4.** $X(a)\cdot X\left(-\frac{a}{1+5a}\right)=$

$=(I_2+aA)\cdot\left(I_2-\frac{a}{1+5a}A\right)=I_2$. $X\left(-\frac{a}{1+5a}\right)\cdot X(a)=\left(I_2-\frac{a}{1+5a}A\right)(I_2+aA)=I_2$, $a\neq-\frac{1}{5}$. Se ține cont că $A^2=5A$. **C5.** $\det B=0$, dar $\det(B+I_2)\neq 0$. **C6.** $\det B=1\neq 0\Rightarrow B$ inversabilă. **C7.** $E^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$. **C8.** $B^{-1}=$

$=\frac{1}{\det B}\cdot B^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$; $\det B=2\neq 0$. **C9.** $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$. **C10.** $A(A-mI_2)=(A-mI_2)A=I_2$. Dar $A^2=\begin{pmatrix}9 & 20\\ 4 & 9\end{pmatrix}$ și de aici $m=4$. **C11.** $A(a)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(a)\neq 0$; $\det A(a)=(a-1)(a-2)\Rightarrow a\in\mathbb{R}-\{1,2\}$.

**C12.** $X=A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$. **C13.** $\begin{matrix}AXB=C\\ \det A=1\neq 0\\ \det B=1\neq 0\end{matrix}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{pmatrix}-14 & -23\\ 11 & 18\end{pmatrix}$. **C14.** $\begin{matrix}XA=B\\ \det A=-4\neq 0\end{matrix}\Rightarrow X=$





$=BA^{-1}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 9\\ -3 & 6 & 1\end{pmatrix}$. **C15.** $x\in\{\pm 1\}$. **C16.** $\begin{matrix}A(X+B)=C\\ \det A=1\neq 0\end{matrix}\Rightarrow X+B=A^{-1}C$. Atunci $X=A^{-1}C-B$, $X=$

$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$. **C17.** $B=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}$. Atunci $a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd=0\Leftrightarrow (a+c)^2+(b+d)^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+c=0$ și $b+d=0\Leftrightarrow a=-c$ și $b=-d\Rightarrow \det A=0\Rightarrow A$ nu este inversabilă. **C18.** $A^2=O_2$. Fie $X=$

$=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & -a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$. Atunci $X^2=O_2$. **C19.** $\det B=(b-c)^2\neq 0$, $\forall\, b, c\in\mathbb{R}$, $b\neq c\Rightarrow B$ inversabilă. **C20.** $(AB)\cdot$

$\cdot(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AI_3\cdot A^{-1}=AA^{-1}=I_3$. $(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}\cdot I_3\cdot B=B^{-1}B=I_3$.

## 5. Sisteme de ecuații liniare

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| calcul | calcul | $x=2$ $y=1$ | $x=3$ $y=2$ | $a=1$ $b=0$ | $x=1$ $y=1$ | $x=1$ $y=1$ $z=2$ | $x=1$ $y=1$ $z=1$ | $x=1$ $y=1$ $z=1$ | verificare |

**C1.** $S=\{(3;1)\}$. **C2.** $S=\left\{\left(1,\sqrt{3}\right)\right\}$. **C3.** $S=\{(1;1;1)\}$. **C4.** $(1, 0, 0, 1)$ verifică ecuațiile sistemului. **C5.** $(\alpha, 1, \beta)$ soluție $\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+3\beta=4\\ 3\alpha-\beta=2\end{cases}\Leftrightarrow \alpha=\frac{10}{11}$ și $\beta=\frac{8}{11}$. **C6.** $(1, 2, -3)$ soluție $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2=0\\ m=2\end{cases}\Leftrightarrow m=2$. **C7.** $(2, 1, 2)$ soluție, deoarece verifică ecuațiile sistemului. **C8.** $(7, 2, 1)$ soluție a sistemului conduce la $a=\frac{2}{7}$ și $a=-8$ în același timp, ceea ce este fals. **C9.** Dacă adunăm cele trei ecuații, obținem $4x+4y+4z=4\Leftrightarrow x+y+z=1$. **C10.** Dacă $x=y+z$, atunci sistemul devine: $\begin{cases}y+z=1\\ 3y+z=3\\ 3z=a\end{cases}$ cu soluția $y=1; z=0$. Deci $a=0$. **C11.** $\Delta=-2$, $\Delta_x=-2a$, $\Delta_y=-4$, $\Delta_z=-2a-2\Rightarrow x=a, y=2, z=a+1$. **C12.** Dacă comparăm prima ecuație și a treia, avem: $\begin{cases}x+y+2z=4\\ 2x+2y+4z=7\end{cases}$, adică $8=7$. Fals. **C13.** Din ecuația a treia $\Rightarrow z_0=0$. Sistemul se reduce la $\begin{cases}x_0-2y_0=-5\\ x_0+y_0=4\end{cases}\Leftrightarrow x_0=1, y_0=3$. Atunci $b=10$. **C14.** 1 kg de mere costă 1 leu, 1 kg de caise costă 2 lei, 1 kg de nectarine costă 3 lei. **C15.** $|AB|=4$; $|AC|=4$; $|BC|=5$. Deci $AB\equiv AC\Rightarrow \Delta ABC$ isoscel. **C16.** Soluția sistemului este $(0, 1, 0)$, pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}^*$ distincte. **C17.** Din a doua ecuație se obține $z=3$. Din $x+y=3$, cu $x, y\in\mathbb{N}$, obținem $S=\{(0, 3, 3); (1, 2, 3); (2, 1, 3); (3, 0, 3)\}$. **C18.** Se obține $x=\frac{a}{2}$; $y=\frac{a}{2}$ și $z=1\Rightarrow a=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. **C19.** Sistemul admite soluție unică $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det A \neq 0$. $\det A = -5m + 15 \Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{3\}$. **C20.** Se obține $x = \frac{1}{1+a^2}$, $y = \frac{a}{1+a^2}$ și $z = \frac{a^2}{1+a^2}$, de unde $y^2 = xz$ și concluzia.

## 6. Probleme de sinteză – algebră

**1.** a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se obține pentru $a = 1$, $b = 0$; b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix}$; $a, a' \in (0, \infty)$; $b, b' \in \mathbb{R}$. $A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ a'b + b' & 1 \end{pmatrix}$, $aa' \in (0, \infty)$; $a'b + b' \in \mathbb{R}$; c) $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** a) $f(O_2) = O_2$; b) $f(X + Y) = A(X + Y) - (X + Y)A = AX + AY - XA - YA = AX - XA + AY - YA = f(X) + f(Y)$; c) Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se obține $f(X) = \begin{pmatrix} 2c - b & 2d - 2a - b \\ a + c - d & b - 2c \end{pmatrix}$, de unde deducem că, de exemplu, ecuația $f(X) = I_2$ nu are soluții, deci $f$ nu e surjectivă. **3.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $A^5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow n = 6$; b) $I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 = O_2$; c) $I_2 + A + A^2 + \ldots + A^{2015} = I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 \cdot (I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) + \ldots + A^{2010}(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5) = O_2 + A^6 \cdot O_2 + \ldots + A^{2010} \cdot O_2 = O_2$. **4.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 10 + 2x = 0$ și $7 + x + y = 0$, de unde $x = -5$ și $y = -2$; c) $A^{2014} - 5A^{2013} - 2A^{2012} = A^{2012}\left(A^2 - 5A - 2I_2\right) = O_2$ conform punctului anterior. **5.** a) $X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + (a + b)A + abA^2$. Dar $A^2 = 5A$. Atunci $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a + b + 5ab)A = X(a + b + 5ab)$; b) $X(a) \cdot X(c) = X(a + c + 5ac)$; $X(a + c + 5ac) = X(c)$, $\forall a \in \mathbb{R}$; $c = -\frac{1}{5}$; c) Din punctul anterior avem $X(a) \cdot X\left(-\frac{1}{5}\right) = X\left(-\frac{1}{5}\right)X(a) = X\left(-\frac{1}{5}\right)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Deoarece $X\left(-\frac{1}{5}\right)$ se află în produsul de matrice $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ produsul este $X\left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow t = -\frac{1}{5}$. **6.** a) Se verifică prin calcul; b) Folosind punctul a) avem $B = \left(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)$, $2 < 3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$; $3 < 5 \Rightarrow \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{5}$; $5 > 2 \Rightarrow \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{2}$. Deci $B > 0$; c) Din punctul a) $C = (2^x - 3^x)(3^x - 7^x)(7^x - 2^x)$, $C = 0 \Rightarrow 2^x - 3^x = 0$ sau $3^x - 7^x = 0$ sau $7^x - 2^x = 0 \Rightarrow x = 0$. **7.** a) Se verifică prin calcul; b) Folosind punctul anterior, $2B = (2008 + 2009 - 2010)[(2008 - 2009)^2 + (2009 + 2010)^2 + (-2010 - 2008)^2]$. Atunci $B > 0$; c) $2C = (2^x + 3^x + 5^x)[(2^x - 3^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 + (5^x - 2^x)^2]$. $C = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2^x + 3^x + 5^x = 0$ sau $(2^x - 3^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 + (5^x - 2^x)^2 = 0$. Prima ecuație nu are soluție. Din a doua ecuație obținem $2^x = 3^x$ și $3^x = 5^x$ și $5^x = 2^x \Rightarrow x = 0$. **8.** a) Se verifică prin calcul; b) Din punctul a) $A^2 - A - I_2 = O_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A^2 - A = I_2 \Leftrightarrow A(A - I_2) = I_2$. Atunci $B = A - I_2$; c) Dacă $B = A - I_2$. Se verifică prin calcul egalitatea cerută.





**9.** a) Se verifică prin calcul pentru două matrice oarecare din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; b) $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \cdot \det(A) = (\det A)^2$; c) $\det(X^2) = (\det X)^2$. Atunci $(\det X)^2 = -2$, ceea ce este imposibil în $\mathbb{R}$. **10.** a) Se verifică prin calcul; b) Se verifică prin calcul; c) $\det(C + D) + \det(C - D) = 2 \det C + 2 \det D = 0$. **11.** a) $\text{card } \Gamma = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$; b) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det A = a \cdot d - b \cdot c$. Pentru a determina valoarea maximă, $a \cdot d$ este maxim și $b \cdot c$ minim $\Rightarrow$ $\Rightarrow \det A = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$. Pentru valoarea minimă, $a \cdot d$ este minim și $b \cdot c$ maxim $\Rightarrow \det A = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = -10$; c) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $\det A = a \cdot d - b \cdot c$. Pentru ca $\det A$ să fie impar, $a, d \in \{1, 3\}$ și $b, c \in \{2, 4\}$ sau $a, d \in \{2, 4\}$ și $b, c \in \{1, 3\}$. Matricele sunt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **12.** a) Se verifică prin calcul; b) $\det(A \cdot {}^tA) = \det A \cdot \det {}^tA = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; c) $\text{Tr}(A \cdot {}^tA) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A = O_2$. **13.** a) Se verifică prin calcul; b) $\frac{x}{y} = \frac{z}{t} = k \Rightarrow x = ky$ și $z = kt$. $B = \begin{pmatrix} ky & y \\ kt & t \end{pmatrix}$, $\det B = 0$; c) Din punctul anterior, $\det(A + B) + \det(A - B) = 2 \det A + 2 \det B$. Dar $\det A = 0$, $\det B = 0 \Rightarrow$ concluzia. **14.** a) $A_1A_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + y - 3 = 0$; b) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $\mathcal{A}_{A_0A_1A_2} = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{3}{2}$; c) $A_n \in A_1A_2 \Leftrightarrow -2(n - 1) + 2n + 1 - 3 = 0$. **15.** a) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 44$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{44}{2} = 22$; b) $M$ mijlocul lui $AB \Leftrightarrow x_M = 5$, $y_M = 2$; $N$ mijlocul lui $AC \Leftrightarrow x_N = 3$, $y_N = 5$; $MN: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x - 2y + 19 = 0$; c) Fie $P(x, y) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = -6x - 4y + 60$. Dar $P \in MN$, deci $3x + 2y = 19 \Rightarrow \Delta = 22$ și $\mathcal{A}_{\Delta PBC} = \frac{22}{2} = 11 = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{\Delta ABC}$. **16.** a) $d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$; $d_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 0$; $d_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0$; $d_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow z = 1$; $S = \{(0, 0, 1)\}$; b) $d = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1$. Dacă $d \neq 0$, sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (a - 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$; c) $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = (a - 1)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \{(0, 0, 1)\}$. **17.** a) Se verifică prin calcul; b) $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \neq b \Rightarrow a + b - 2 > 0 \Rightarrow (a - b)(a + b - 2) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$; c) Scădem primele două ecuații și obținem $(a-b)(y-z)=0 \Rightarrow y=z$. **18.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} =$

$= -a^2 \leq 0, \forall a \in \mathbb{R}$; b) $A$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow -a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0, a \in \mathbb{R}^*$; c) Dacă $a \neq 0 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistem compatibil determinat. $d_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = 0$, $d_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$, $d_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow S = \{(0,0,0)\}$.

**19.** a) Se verifică înlocuind în sistem; b) Dacă adunăm prima și a treia ecuație, obținem: $3y+4z=7$; c) Ținând cont de punctul b), obținem $y=z=1$ și sistemul se reduce la $\begin{cases} x+2t=2 \\ 2x-2t=4 \end{cases} \Rightarrow x=2, t=0 \Rightarrow S=\{(2,1,1,0)\}$.

**20.** a) $A_1A_3: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4x+y+3=0$; b) $A_1, A_2, A_3$ sunt coliniare $\Leftrightarrow A_2 \in A_1A_3 \Leftrightarrow -4 \cdot 2 + 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1=0$, fals. Deci, $A_2 \notin A_1A_3$, atunci $A_1, A_2, A_3$ nu sunt coliniare; c) Dacă $A_n \in d \Rightarrow n - n^2 - 4 = 0 \Rightarrow n - n^2 = 4$ sau $n^2 - n = -4$; $n(n-1) = -4$; $n, n-1$ sunt consecutive; $-4$ nu se poate scrie ca produs de două numere consecutive. Atunci $n - n^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow A_n \notin d$.

## 7. Limite de funcții. Asimptote

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{2}{3}$ | 1 | $-2$ | 5 | Limitele laterale sunt diferite. | $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = \infty$ | $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$ | $a=8$ | $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x)-x) = 2$ | $y=x$ |

**C1.** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = 5$. **C2.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$. **C3.** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = +\infty$. **C4.** Se obține $2a = 3 - a^2 \Rightarrow a \in \{1; -3\}$. **C5.** a) $-\frac{5}{4}$;

b) $\infty$; c) 2. **C6.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{12}$; c) $\frac{2}{9}$. **C7.** $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 2a \Rightarrow a = 1007$. **C8.** a) $-5$; b) 6; c) $\ln 2$. **C9.** $x=4$.

**C10.** $y = \frac{1}{3}$ asimptotă orizontală la $+\infty$. **C11.** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$; $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - 3x) = 7 \Rightarrow y = 3x + 7$.

**C12.** $x=2$ și $x=4$. **C13.** $y=0$ asimptotă orizontală la $-\infty$. **C14.** $y = x + 1$ asimptotă oblică comună la $+\infty$.

**C15.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty}(f(x) - 2x) = 1 \Rightarrow y = 2x + 1$. **C16.** Obligatoriu $b = 0 \Rightarrow a = 1$.

**C17.** $\frac{m}{2m+1} = \frac{2}{5} \Rightarrow m = 2$. **C18.** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$. Din $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - 2x) = 3 \Rightarrow a + 4 = 3 \Rightarrow a = -1$. **C19.** Obligatoriu

$a = 1 \Rightarrow b + 2 = 3 \Rightarrow b = 1$. **C20.** $\lim\limits_{x \to \infty}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 3$.





## 8. Funcții continue

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| verificare cu ajutorul limitelor laterale | $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = 7$ $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = 5$ | continuă | verificare cu ajutorul limitelor laterale | „$-$” pentru $x<1$ și „$+$” în rest | + | verificare | $a=2009$ $b=2$ | verificare cu ajutorul limitelor laterale | $\{2\}$ |

**C1.** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0) = 1$. **C2.** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1$. **C3.** $f$ e continuă pe $\mathbb{R}$. **C4.** $a=0$. **C5.** Se obține

$2a+4 = a^2+1 \Rightarrow a \in \{-1; 2\}$. **C6.** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = 3$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = 2$ și concluzia. **C7.** Din continuitate obținem $a+4 =$

$= 2a + b \Rightarrow b = -a + 4$, iar din limită avem: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 4$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = a \Rightarrow a = 4$ și $b = 0$.

**C8.** $f(1) = -6, f(2) = 4$ și $f$ e continuă. **C9.** Semnul „$-$” pentru $x<2$ și semnul „$+$” pentru $x>2$. **C10.** Se deduce din tabelul de semn. **C11.** Din tabelul de semn se obține $x \in [0, 2) \cup [4, \infty)$. **C12.** Din tabelul de semn se obține $x \in (e, 3)$. **C13.** $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) \cdot f(x) = \lim\limits_{x \to 2}(x-2)$. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$. $f(2) = 0$. **C14.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2 \Rightarrow$ limita căutată

este $\frac{3}{4}$. **C15.** $f$ este strict crescătoare $\Rightarrow$ injectivă. $f(0) = 1, f(1) = 1 + e \Rightarrow \operatorname{Im} f = [1, 1+e] \Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ bijectivă. **C16.** $f$ este strict crescătoare și $\operatorname{Im} f = (1, 4 + \ln 2) \Rightarrow f$ nu este surjectivă. **C17.** $\frac{2x^3+x-7}{x^3-1} \geq$

$\geq 2 \Rightarrow \frac{x-5}{x^3-1} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [5, \infty)$. **C18.** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x<e}} f(x) = e + 1 > 3$. $f$ este continuă, de unde obți-

nem concluzia. **C19.** $f$ este strict crescătoare $\Rightarrow$ injectivă. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow$ surjectivă $\Rightarrow$ bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ inversabilă. **C20.** Se obține $g(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{x^2+2xt+t^2+3x+3t-x^2-3x}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{2xt+3t+t^2}{t} = 2x+3$ și concluzia.

## 9. Derivata unei funcții

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | derivate laterale egale | derivate laterale diferite | $2014x^{2013} + 2014$ | calcul | calcul | $\{-1\}$ | 1 | $y = 6x - 9$ | 5 |

**C1.** $f'_s(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2-x-0}{x} = -1$; $f'_d(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x^2+x-0}{x} = 1 \Rightarrow f$ nu e derivabilă în $x=1$. **C2.** $f'_s(1) = 7$;

$f'_d(1) = 7$, deci $f'(1) = 7$. **C3.** a) $f'(x) = 2x + 4$; b) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$; c) $f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5} - \frac{5}{x^6}$; d) $f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$;

e) $f'(x)=2x+e^x$; f) $f'(x)=2^x\ln 2+5^x\ln 2$; g) $f'(x)=\frac{1}{x}-1$; h) $f'(x)=2009x-3\sin x$; i) $f'(x)=2x-e^{-x}\ln 2$; j) $f'(x)=$

$=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$. **C4.** a) $f'(x)=e^x\left(x^2+2x\right)$; b) $f'(x)=-\frac{x+2}{x^3}$; c) $f'(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}$; d) $f'(x)=\frac{-x^2-2x+4}{\left(x^2+4\right)^2}$;

e) $f'(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$; f) $f'(x)=1+\ln x$. **C5.** a) $f''(x)=6x$; b) $f''(x)=e^x$; c) $f''(x)=(x+3)e^x$;

d) $f''(x)=\frac{4}{x^3}$; e) $f''(x)=\frac{18}{(x-3)^3}$; f) $f''(x)=\frac{1}{x}$. **C6.** $g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\Rightarrow g(2)+g(2^2)+g(2^4)+g(2^8)=$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{16}}<\frac{1}{2}$. **C7.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-2$. **C8.** $f(0)=0\Rightarrow c=0$; $f'(x)=e^x\cdot(ax^2+bx+2ax+b)$, $f'(0)=$

$=1\Rightarrow b=1$; $f''(x)=e^x(ax^2+x+2ax+1+2ax+1+2a)=e^x(ax^2+(4a+1)x+2a++2)$, $f''(0)=4\Rightarrow a=1$.

**C9.** $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x)=\frac{1}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}$ și verificare. **C10.** Verificare. **C11.** $f'(x)=\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}\Rightarrow f'(0)=$

$=0\Rightarrow$ ecuația este $y-1=0$. **C12.** Obținem $f'(x)=9\Rightarrow 3x^2-3=9\Rightarrow x\in\{2;-2\}$. **C13.** Se obține $f'(x)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow e^x-1=1\Rightarrow x=\ln 2$. **C14.** $f_2(x)=2x+2$, $f_3(x)=2$, $f_n(x)=0$ etc. **C15.** a) $-\frac{4}{3}$; b) 0; c) $\infty$; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) 1;

g) $\frac{1}{2}$; h) $-2$. **C16.** Din continuitate $\Rightarrow b+8=27a$. Apoi $f_s'(2)=8$, $f_d'(2)=32a\Rightarrow a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{5}{4}$. **C17.** $g(x)=$

$=e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}=2e^{-x}$; $S=1+e^{-1}+e^{-2}+\ldots+e^{-10}=\frac{1-e^{-11}}{1-e^{-1}}$; $S=2\cdot\frac{1-e^{-11}}{1-e^{-1}}=2\cdot\frac{e^{11}-1}{e^{11}}\cdot\frac{e}{e-1}=2\cdot\frac{e^{11}-1}{e^{11}-e^{10}}>2$.

**C18.** $f'(1)=1\Rightarrow a=-1$. Punctul (1, 2) e pe grafic $\Rightarrow b=2$. **C19.** $f'(x)=(x+1)e^x$, $f''(x)=(x+2)e^x\Rightarrow a+b=1$

și $a-2b=0\Rightarrow a=2$, $b=-1$. **C20.** Se aplică regula lui l'Hospital de 4 ori și se obține $\frac{1}{24}$.

## 10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=5x^4+1>0$ | $(0,3)$ | $f''(x)=30x^4+4>0$ | $x_1=2$ și $x_2=2$ | $f'(x)=a\cdot 2^x\ln 2+1>0$ |
| **I6.** | **I7.** | **I8.** | **I9.** | **I10.** |
| $f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ | $x=0$ | $(-\infty,-1)$ și $(1,\infty)$ | $(0,\infty)$ | 0 |

**C1.** $f'(x)=e^x+2015x^{2014}>0$. **C2.** $f''(x)=e^x+2014\cdot 2013x^{2012}>0$. **C3.** $f(x)=4e^{x^4}\cdot x^3$ și $x=0$ este singurul punct de extrem. **C4.** $f'(x)=3x^2-2x+1=x^2+(x-1)^2>0$. **C5.** $f'(x)=2008x^{2007}-2008$; $f''(x)=2008\cdot$

$\cdot 2007\cdot x^{2006}\geq 0$. **C6.** $x=0$ este punctul de extrem comun. **C7.** $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$; $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}<0$. **C8.** $f'(x)=$





$=1+\frac{1}{(x-2007)^2}$ și concluzia. **C9.** $f''(x)=\frac{2}{(x-2007)^3}$ și concluzia. **C10.** $f''(x)-g''(x)=2-\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=$

$=\frac{2x^4+6x^2}{(1+x^2)^2}\geq 0$ și concluzia. **C11.** Valorile extreme ale lui $f$ sunt $f(-1)=-\frac{1}{2}$ și $f(1)=\frac{1}{2}$. **C12.** $f'(x)=3^x\ln 3-$

$-3^{-x}\ln 3\Rightarrow x=0$ punct de extrem. Concluzia se deduce din tabelul de variație. **C13.** $f'(x)=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}<0$,

$\forall x>1\Rightarrow f$ este descrescătoare și concluzia se obține știind că $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$. **C14.** $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

Apoi $f(0)=\frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$. **C15.** $f(1)=1$, $g(1)=1$, $f'(x)=\frac{1}{x}>0\Rightarrow f$ crescătoare, $g'(x)=-4x^3<0\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ descrescătoare și concluzia. **C16.** $f''(x)=2xe^{x^2}>0$ pentru orice $x>0$. **C17.** Fie $f(x)=e^x-x-1$. Inegalitatea este obținută din tabelul de variație. **C18.** $f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ și obținem că $x=4$ e punct de minim. Cum

$f(4)=8$, se obține apoi concluzia. **C19.** $f'(x)=\frac{1}{x}+3x^2-6x+3>0\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă. Apoi

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow$ bijectivă. **C20.** $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow x=1$ punct de minim global.

Cum $f(1)=2\Rightarrow a=b=c=2$.

## 11. Probleme de sinteză – analiză matematică

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=+\infty$; b) Se obține din tabelul de variație; c) Avem $f''(x)=$

$=-\frac{1}{x^2}$, deci funcția $f$ este concavă și, prin urmare, nu are puncte de inflexiune. **2.** a) $f''(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$; b) $f_{max}=$

$=f(1)=\frac{1}{2}$, $f_{min}=f(-1)=-\frac{1}{2}$; c) $f_{max}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=b=c=1$. **3.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=1\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ecuația este $y=x+1$; b) $f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; c) $f_{min}=f(2)=4\Rightarrow f(x^2)+f(x^3)\geq 8$. **4.** a) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$; b) Pe

$(0,e^2)$ funcția este crescătoare, iar pe $(e^2,\infty)$ este descrescătoare; c) $3<5<e^2\Rightarrow f(3)<f(5)\Rightarrow\frac{\ln 3}{\sqrt{3}}<\frac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\sqrt{5}}<5^{\sqrt{3}}$. **5.** a) $f'(x)=e^x-1\Rightarrow x=0$ punct de minim; b) Din tabelul de variație $\Rightarrow \mathrm{Im}\,f=[1,\infty)$; c) $f(x^{2008})+$

$+f(x^{208})\geq 2$ și concluzia. **6.** a) Verificare; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$; c) Echivalent cu $4x\leq e^{4x}-1$, care este adevărat din

tabelul de variație al funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{4x}-4x-1$. **7.** a) $f'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; b) Din tabelul de variație

obținem $\mathrm{Im}\,f=[0,1)$; c) Concluzia se obține din $f(x)<1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **8.** a) $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$; b) $f'(x)<0$, $\forall x\in$

$\in (0, 2)$; c) $\sqrt{2} \le \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{2}) \ge f(\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \ge \frac{e^{\sqrt{3}}}{3}$ și concluzia. **9.** a) $f'(x) = 1 + \ln x$, $f''(x) = \frac{1}{x} < 0$, $\forall x > 0$; b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-1}$ și din tabelul de variație deducem că acesta este singurul punct de extrem; c) $f(0, 1) > f(e^{-1}) \Rightarrow$ $\Rightarrow 0{,}1 \ln 0{,}1 > e^{-1} \ln e^{-1} \Rightarrow 0{,}1^{0{,}1} > e^{-\frac{1}{e}}$. **10.** a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$, $f'(2) = 0$, $f(2) = -1 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = -1$; b) $f''(x) = 6x - 6 \ge 0$, $\forall x \ge 1$; c) Din tabelul de variație $\Rightarrow$ ecuația $f(x) = 0$ are 3 rădăcini reale distincte. **11.** a) $f''(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$; b) $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$; c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, $f$ crescătoare $\Rightarrow f(x) > 0$, $\forall x > 0$. **12.** a) $a = 0$; b) $x < 0$, $f'(x) = e^x$, $f'(-1) = \frac{1}{e}$, $f'(-1) = \frac{1}{e} - 1 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = \frac{1}{e}x - 1 + \frac{2}{e}$; c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 + x} = 0$. **13.** a) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; b) $x = e$ este punct de maxim global $\Rightarrow f(x) \le f(e)$, $\forall x \in (0, \infty)$; c) $x > e \Rightarrow f$ este descrescătoare $\Rightarrow f(2011) > f(2012) \Rightarrow \frac{\ln 2011}{2011} > \frac{\ln 2012}{2012} \Rightarrow 2011^{2012} > 2012^{2011}$. **14.** a) $f'(x) = 4x + \frac{3}{2\sqrt{3x+16}} > 0$, $\forall x \ge 0$; b) $f(x) \ge f(0) \Rightarrow f(x) \ge 5$; c) $a = 3$ este soluție unică deoarece $f$ este injectivă. **15.** a) Verificare; b) $x_1 = 1$ punct de maxim, $x_2 = e^2$ punct de minim; c) Tabelul de variație ne arată că $f(x) \le f(e^2)$, $\forall x > 1 \Rightarrow \frac{\ln^2 x}{x} \le \frac{4}{e^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{e} \Rightarrow e \ln x \le 2\sqrt{x}$. **16.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale; b) $f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $f'(x) < 0$, $\forall x > 0$ și concluzia. **17.** a) $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$; b) $y = 0$; c) $f$ este descrescătoare $\Rightarrow f(0) \ge$ $\ge f(x) > \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. **18.** a) $f'(x) = -\frac{x^2 + 2x}{(1 + x + x^2)^2}$; b) $f'(0) = 0$; $f(0) = 1 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = 1$; c) $f_{min} = f(-2) = -\frac{1}{3}$; $f_{max} = f(0) = 1$. **19.** a) $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x > 1$; b) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{40}$; $3\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} \Rightarrow 2\sqrt[3]{5} <$ $< 3\sqrt[3]{3} \Rightarrow f(2\sqrt[3]{5}) > f(3\sqrt[3]{3})$; c) $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3} > 0$, $\forall x > 1$. **20.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ nu există asimptotă la $+\infty$; b) $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - x}{x^2}$, iar $x = 1$ este punct de maxim; c) $f(x) \le f(1)$, $\forall x > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} -$ $- \ln x \le 0$; $x - 1 - x \ln x \le 0$ și concluzia.

## Clasa a XII-a

### 1. Legi de compoziție

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | verificare | verificare | 3 | $-1$ | 9 | $\hat{1}$ | $\hat{4}$ | verificare | verificare |





**C1.** $2 \perp 3 = 2^3 + 3^2 = 17$. **C2.** $t * t = t^2 - 8t + 20 \Rightarrow t = 4$. **C3.** Verificare. **C4.** $x + y = 2k + 2l = 2(k + l) \in A$. **C5.** $x \circ y = (x + 4)(y + 4) - 4 > -4$, $\forall x, y \in G$. **C6.** Verificare. **C7.** Verificare. **C8.** $xy = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$ și concluzia. **C9.** Se obține $x = 0$. **C10.** Verificare. **C11.** Din $x * x' = 3 \Rightarrow x' = \frac{2x - 3}{x - 2} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C12.** $x * 2 = x$, $\forall x \Rightarrow a = 2$. **C13.** Se obține $a = 12$. **C14.** Verificare. **C15.** Se deduce din tabla operației. **C16.** $x \perp x \perp x = (x - 2)^3 + 2 = 10 \Rightarrow x - 2 = 2 \Rightarrow x = 4$. **C17.** $x, y \in A$, $x = a + b\sqrt{3}$, $y = c + d\sqrt{3}$. Atunci $xy = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$ și concluzia. **C18.** Deoarece $x \perp 2 = 2$, $\forall x \Rightarrow 10 \perp 9 \perp \ldots \perp 1 \perp$ $\perp 0 = 2$. **C19.** $(x * y) * z = \sqrt[3]{(x * y)^3 + z^3 + 1} = \sqrt[3]{(x^3 + y^3 + z^3 + 2}$ etc. **C20.** $a * b = (a - 2)(b - 2) + 2$. Putem alege, de exemplu, $a - 2 = \frac{3}{2}$ și $b - 2 = \frac{2}{3}$ etc.

### 2. Structuri algebrice. Morfisme

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| verificare | verificare | verificare | verificare | verificare | verificare | $\hat{3}$ | $\{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1} + \hat{3} = \hat{0}$ |

**C1.** Se verifică axiomele, iar $e = 2$. **C2.** Elementul neutru este 4. Se verifică axiomele. **C3.** Calculul se simplifică dacă utilizăm relația $X(a)X(b) = X(a + b)$. **C4.** Se verifică. **C5.** Se verifică. **C6.** $f(x \circ y) = xy - 3x - 3y + 9 = (x -$ $- 3)(y - 3) = f(x)f(y)$. **C7.** Din tabla operației se obține partea stabilă și comutativitatea. Elementul neutru este $\hat{0}$, iar $\hat{2}$ și $\hat{4}$ sunt simetrice unul celuilalt. **C8.** Se verifică. **C9.** Verificare. **C10.** Verificare. Elementele neutre sunt 1 și respectiv 2. **C11.** $\det(A) \neq 0$. **C12.** Suma este egală cu $\hat{4}$. **C13.** $\hat{2}^3 = \hat{0} \Rightarrow \hat{2}^{2012} = \hat{0}$. **C14.** Elementele inversabile sunt $\hat{1}$ și $\hat{5}$, iar produsul lor este $\hat{5}$. **C15.** $\det A = \hat{1} + \hat{1} + \hat{2} - \hat{2} - \hat{2} - \hat{2} = \hat{4}$. **C16.** Se obține $a = 1$. **C17.** Verificare. **C18.** Se folosește relația $Ax \cdot Ay = A(x + y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. **C19.** $S = \hat{2} + \hat{5} = \hat{1}$, $P = \hat{0} +$ $+ \hat{1} + \hat{3} + \hat{4} = \hat{2} \Rightarrow S + P = \hat{3}$. **C20.** $y = \hat{5} + \hat{4}x \Rightarrow \hat{5}x + \hat{3} + x = \hat{2} \Rightarrow \hat{6}x = \hat{6} \Rightarrow x = \hat{1} \Rightarrow y = \hat{2}$.

### 3. Polinoame

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-8$ | calcul | $c = 2X^3 + X^2 + X$ $r = 5$ | $r = 0$ | calcul | $a = -6$ | calcul | $m = 2013$ | 2, 2, $-2$ | $(X-2)\cdot$ $\cdot(X+2)\cdot$ $\cdot(X^2+4)$ |

**C1.** Se obține $a = -4$, $b = -1$, $c = 6$. **C2.** Se verifică prin împărțire. **C3.** $f = aX^2 + bX + c$. Se obține $c = 5$, $a + b +$ $+ c = 7$ și $4a + 2b + c = 11 \Rightarrow c = 5$, $b = 1$, $a = 1$. **C4.** Suma este egală cu $f(1) = 1 + 2 = 3$. **C5.** $f(-1) = 1 - 3 +$ $+ a - 3 - a + 4 = -1$. **C6.** $f(2) = 0 \Rightarrow a = -9$. **C7.** $f^2 = \hat{1}$, deci are gradul 0. **C8.** Restul este egal cu $(a - 4)X +$ $+ (b - 2)$, de unde $a = 5$ și $b = 0$. **C9.** $f(\hat{2}) = \hat{5}a + \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow a = \hat{4}$. **C10.** $f = (X + 1)(X^2 + 1)$. **C11.** $y^2 = y + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^3 = y^2 + y = 2y + 1$. **C12.** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6^2 - 2 \cdot 11 = 14$. **C13.** Din $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ se obține relația prin adunare. **C14.** $f(1) = 0 \Rightarrow a + b = -3$; $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = -16 \Rightarrow a = -13$ și $b = 10$. **C15.** $g = (X-1) \cdot f - 3X \Rightarrow$ $\Rightarrow g(x_1) + g(x_2) = -3(x_1 + x_2) = -3$. **C16.** Cu notația $x^3 = t$ se obțin soluțiile reale 1 și 2. **C17.** $x = 1$ este singura soluție rațională. **C18.** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 4$. **C19.** $g$ admite rădăcinile $\pm 1$ și $f(\pm 1) = 0$. **C20.** Prin încercări se obțin soluțiile. **C21.** Câtul este $c = X^2 + \hat{4}x + \hat{2}$ și restul $r = \hat{3}$. **C22.** $f(\sqrt{2}) =$ $= (2m + 8)\sqrt{2} + 25 \in \mathbb{Q} \Rightarrow m = -4$. **C23.** Din teorema împărțirii cu rest avem: $f = (X^2 - X) \cdot c(X) + aX + b$. Din $X = 0$ obținem $b = 3$, iar din $X = 1$ obținem $b = 3 \Rightarrow r = 3X + 3$. **C24.** $f(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = -1$; $f'(1) = 0 \Rightarrow 15a =$ $= 15 \Rightarrow a = 1$, $b = -3$. **C25.** $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow a = 11$. **C26.** Presupunem prin reducere la absurd că $\exists x \in$ $\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ cu $f(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{q} \Rightarrow q \mid 1$ și $p \mid 1 \Rightarrow q = 1$ și $p = \pm 1 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}$ contradicție cu $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. **C27.** $D =$ $= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - (x_1 + x_2 + x_3)^2 = -15 - 4 = -19$. **C28.** Imediat $x_2 = 1 - i$. Apoi $f$ se divide cu $(X - x_1)(X - x_2) = X^2 - 2X + 2$. Egalând câtul cu 0 obținem $x_3 = 2$ și $x_4 = 3$. **C29.** Din $f(i) = 0$ obținem $a = 1$ și $b = -4$. **C30.** Dacă $y \in \mathbb{Z}$ e rădăcină $\Rightarrow y \in \{\pm 1\}$. Dacă $y = 1 \Rightarrow a = 1$, iar $y = -1 \Rightarrow a = 1$.

## 4. Probleme de sinteză – algebră

**1.** a) $2^0 = 1$; b) $2^{x+x^2} = 64 \Rightarrow x + x^2 = 6 \Rightarrow x \in \{2; -3\}$; c) $(x \circ y) \circ z = 2^{x|y} \circ z = 2^{2^{x|y}+z} = 2^{z+1} \Rightarrow x + y = 0$. **2.** a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6^2 - 2 \cdot 12 = 12$; b) Verificare; c) Se obține $x_1 = x_2 = x_3 = 2 \Rightarrow m = 8$. **3.** a) $\hat{2}x = \hat{6} \Rightarrow x \in$ $\in \{\hat{3}; \hat{7}\}$; b) $f(\hat{0}) = f(\hat{4})$; c) Se obține $\hat{1} + \hat{0} + \hat{1} + \hat{0} + \hat{1} + \hat{0} + \hat{1} = \hat{4}$. **4.** a) $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Din $x_1 + x_3 =$ $= 2x_2 \Rightarrow x_2 = 2$; b) $x_1 = 2 - r$, $x_3 = 2 + r$. Din $x_1x_2x_3 = p \Rightarrow (2 - r)(2 + r) = -5 \Rightarrow 4 - r^2 = -5 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 5$; c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36 - 2m < 0$. **5.** a) $2^x + 4^x - 1 = 5 \Rightarrow 4^x + 2^x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$; b) $C_n^0 \circ C_n^1 \circ C_n^2 =$ $= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 - 2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} - 2 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n = 10$; c) $x \circ x^2 = x + x^2 - 1 \le 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 \le$ $\le 0 \Rightarrow x \in [-2, 1]$. **6.** a) Verificare; b) $f(x)f(y) = X(x-1)X(y-1) = X(x - 1 + y - 1 + (x-1)(y-1)) = X(xy - 1) =$ $= f(xy)$; c) $X(-4)X(-3) \dots X(0) = f(-3)f(-2) \dots f(0)f(1) = f(-3 \cdot (-2) \cdot \dots \cdot 0 \cdot 1) = f(0) = X(-1)$. **7.** a) $5^x = t \Rightarrow 2t^2 -$ $- 12t + 20 = 0 \Rightarrow t \in \{1, 5\} \Rightarrow x \in \{0; 1\}$; b) $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3 \ge 3$; c) Putem alege $x - 3 = \frac{4}{3}$ și $y -$ $- 3 = \frac{3}{4}$ de exemplu $\Rightarrow x = \frac{13}{3}$, $y = \frac{15}{4}$. **8.** a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a \Rightarrow a = 5$; b) $X^4 - X^3 - X + 1 = (X^3 - 1) \cdot (X -$ $- 1) = (X-1)^2(X^2 + X + 1) \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$; c) Fie $\alpha$ o rădăcină întreagă $\Rightarrow \alpha \mid 1 \Rightarrow \alpha \in \{\pm 1\}$. Pentru $\alpha = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a = 1$. Pentru $\alpha = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow a = -1$. **9.** a) $\det(A) = \hat{2}$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$; $A^3 =$





$= \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$; $A^4 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix} = \hat{2}I_2 \Rightarrow A^8 = I_2 \Rightarrow n = 8$; c) $A^{-1} = A^7$. **10.** a) Verificare; b) Verificare; c) Conform punctului a), rezultatul este $-4$. **11.** a) $a_0 = f(0) = 1 + 3^{20}$; b) $2a_0 + 4a_1 + \dots +$ $+ 2^{21}a_{20} = 2f(2) = 4$; c) Fie $r = aX + b$. Din teorema împărțirii cu rest, $f = (x-2)^2 \cdot q(x) + aX + b$. Din $f(2) = 2a +$ $+ b \Rightarrow 2a + b = 2$. Apoi $f'(2) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow r = 2$. **12.** a) $a = -1$; b) Verificare; c) Fie $s =$ $= \frac{3}{2} * \frac{5}{3} * \frac{7}{4} * \dots * \frac{199}{100}$. Atunci $f(s) = f\left(\frac{3}{2}\right) f\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{199}{100}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{100} \Rightarrow s = \frac{101}{100}$. **13.** a) $c = X^2 -$ $- 2X + 1$, $r = -2x + 2$; b) $f(x_1) + f(x_2) = r(x_1) + r(x_2) = -2(x_1 + x_2) + 2 = 0$; c) Dacă $\alpha$ e rădăcină întreagă $\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha \mid 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$. Cum $f(1) = 0$ și $f(-1) \ne 0 \Rightarrow \alpha = 1$. Dar $f' = 4X^3 - 9X^2 + 4X - 1$ și $f'(1) \ne 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha = 1$ e singura rădăcină întreagă. **14.** a) Verificare; b) $X(a) \cdot X\left(-\frac{a}{1+3a}\right) = X\left(a - \frac{a}{1+3a} - \frac{3a^2}{1+3a}\right) = X(0) = I_2$;

c) Din a) avem lege de compoziție. $I_2 = X(0) \in S$, iar b) ne asigură simetria operației. **15.** a) Din prima relație a lui Viète avem $x_1 + x_2 + x_3 = m + 1 \Rightarrow m = 0$; b) $f = X^3 - X^2 - 3X + 3 = X^2(X-1) - 3(X-1) = (X-1)(X^2 - 3)$; c) Avem $f(\sqrt{3}) = 3m \Rightarrow m = 0$. **16.** a) $9 \circ e^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$; b) $(x \circ y) \circ z = x^{\ln y} \circ z = x^{\ln y \ln z}$ etc.; c) $(x^2 - 1)^{\ln(x^2-1)} =$ $= 1 \Rightarrow \ln(x^2 - 4)\ln(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{5}$. Din $x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ nu convine. **17.** a) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) \ne 0$; b) $r = aX + b \Rightarrow f = (X^2 + X)\,c(X) + aX + b$. Din $f(0) = b \Rightarrow b = 9$. Din $f(-1) = -a + b \Rightarrow$ $\Rightarrow -a + b = 20 \Rightarrow a = -11 \Rightarrow r = -11X + 9 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$, $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \mid 9 \Rightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow$ din a) deducem că $f$ are două rădăcini întregi. **18.** a) Se obține $e = 3$; b) Se obține $a = 1$, $b = -2$; c) Fie $p = 1 \otimes 2 \otimes \dots \otimes$ $\otimes 10 \Rightarrow F(p) = F(1)F(2) \dots F(10)$; $F(p) = 0 \Rightarrow p - 2 = 0 \Rightarrow p = 2$. **19.** a) Se obține $e = 5$; b) Se obține $x' = 10 - x$; c) Din punctul precedent și din ipoteză avem $1 * 9 = 2 * 8 = 5$ etc. și rezultatul final este 5. **20.** a) Verificare; b) $a = -4$; c) $x \circ x \circ x \circ x = (x+4)^4 - 4 = 12 \Rightarrow (x+4)^4 = 16 \Rightarrow x + 4 = \pm 2 \Rightarrow x \in \{-2; -6\}$.

## 5. Primitive

| 11. | 12. | 13. | 14. | 15. | 16. | 17. | 18. | 19. | 110. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F' = f$ | $x^3 + C$ | este continuă | $F' = f$ | $x^4 + \sin x + C$ | $a = 9$<br>$b = 10$<br>$c = 6$ | $\sin x +$ $+ 2013$ | $x +$ $+ \ln x + C$ | $f + C$ | $F'' > 0$ |

**C1.** $\int f(x)\,dx = \frac{x^{2009}}{2009} + \frac{2008^x}{\ln 2008} + C$. **C2.** $\int f(x)\,dx = e^x + \ln x + C$. **C3.** $g(x) = 7x^6 - \frac{3}{x^4} \Rightarrow \int g(x)dx = x^7 +$ $+ \frac{1}{x^3} + C$. **C4.** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{2(x-2)} = 2$ și se demonstrează că $f$ e continuă. **C5.** $F'(x) = e^x\,(ax^2 + (2a +$ $+ b)x + (b + c)) \Rightarrow a = 1$, $b = -2$, $c = 3$. **C6.** $\int f^2(x)\,dx = x^2 - x + C$. **C7.** Limita e egală cu $f(1) = \frac{1}{2}$. **C8.** $F(x) =$ $= -\frac{1}{x} + 1$. **C9.** $F'(x) = 2ax + b \Rightarrow a = 2$, $b = 3$; $F(2) = 4a + 2b + c \Rightarrow c = -6$. **C10.** $f = F' \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} +$

$+\frac{1}{(x+2)^2}$. **C11.** Fie $F$ o primitivă. Atunci $F'(x)=f(x)$ și $F''(x)=f'(x)=1+\ln x>0\Rightarrow F$ convexă. **C12.** $f(x)-x+1=\frac{1}{x+1}\Rightarrow\int(f(x)-x+1)dx=\ln(x+1)+C$. **C13.** $\int f'(x)dx=f(x)+C=e^{x^2}+C$. **C14.** $\int(f(x)-g(x))dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$. **C15.** $\int f_1(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$. **C16.** $(f_{n+1}(x))'=f_n(x)$. **C17.** $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ orice primitivă e crescătoare. **C18.** $F'(x)=0\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow x\in\{1;3\}$ și construim tabelul de variante. **C19.** $\int\frac{x^2+2}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=x+\operatorname{arctg}x+C$. **C20.** $\int\frac{\sqrt{x^2+4}+1}{x^2+4}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{1}{x^2+4}\right)dx=$

$=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}+C$.

## 6. Integrala definită

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | $-2$ | $\frac{1}{2003}+\frac{1}{2}+1$ | $e^2-e$ | 1 | 1 | $\frac{e^2+1}{4}$ | $\ln\frac{7}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $3+\ln 2$ |

**C1.** $\int_0^1(3x^2+2)dx=x^3+2x\Big|_0^1=3$. **C2.** $\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}\Big|_1^4=1$. **C3.** $ax\Big|_1^a-2x^2\Big|_1^a=a^2-a-2a^2+2=-a^2-a+2-a^2-a+2=6-5a\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow a=2$. **C4.** $I_{2012}+I_{2011}=\int_0^1\left(\frac{x^{2012}}{x+1}+\frac{x^{2011}}{x+1}\right)dx=\frac{x^{2012}}{2012}\Big|_0^1=\frac{1}{2012}$. **C5.** $\int_x^{x+1}f(t)\,dt=-\frac{t^3}{3}\Big|_x^{x+1}+2t^2\Big|_x^{x+1}-3t\Big|_x^{x+1}=-\frac{3x^2+3x+1}{3}+4x+2-3=-x^2+x-\frac{4}{3}\Rightarrow$ $\Rightarrow$ limita este 1. **C6.** $\int_{-1}^0(2x+3)\,dx+\int_0^1(e^x+2)\,dx=x^2\Big|_{-1}^0+3x\Big|_{-1}^0+e^x\Big|_0^1+2x\Big|_0^1=-1+3+e-1+2=e+3$.

**C7.** Se aplică metoda integrării prin părți și obținem $e^x(x+2)\Big|_0^1-2-e^x\Big|_0^1=3e-2-e+1=2e-1$. **C8.** Se aplică metoda integrării prin părți. **C9.** $f'(x)=\frac{a}{x}\Rightarrow a=2$. $\int_1^e f(x)\,dx=2x\ln x\Big|_1^e-2x\Big|_1^e+bx\Big|_1^e=2+b(e-1)=7\Rightarrow$ $\Rightarrow b=\frac{5}{e-1}$. **C10.** Se aplică metoda schimbării de variabilă. a) $x^2+1=t$; b) $\ln x=t$; c) $x^3+2=t$; d) $x^2+1=t$. **C11.** $x^2=t$ conduce la $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-t}dt=-\frac{1}{2e^t}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$. **C12.** $\int_3^4 f(x)f'(x)dx=\frac{1}{2}(f(x))^2\Big|_3^4=9$. **C13.** $\int_{e^2}^x\frac{1}{t}(2\ln t-3)dt=\ln^2 t\Big|_{e^2}^x-3\ln t\Big|_{e^2}^x=\ln^2 x-4-3\ln x+6=\ln^2 x-3\ln x+2=0\Rightarrow\ln x\in\{1,2\}\Rightarrow x\in\{e,e^2\}$. **C14.** $x^2-$





$-2x+1=(x-1)^2\geq 0$ și concluzia. **C15.** $J=\int_0^1\frac{xe^x}{x+1}dx\geq\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$. **C16.** $\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3 g(x)\,dx=\ln|x-1|\cdot\Big|_2^3-\ln|x|\Big|_2^3+\ln|x+1|\Big|_2^3=\ln\frac{16}{9}$. **C17.** $\int_0^2 f(x)\,dx=\ln(1+x^2)\Big|_0^2=\ln 5$. $\int_2^4 f(x)\,dx=\ln(1+x^2)\Big|_2^4=\ln\frac{17}{5}$.

**C18.** $\int_0^1\sqrt{xe^x}dx\leq\int_0^1\frac{x+e^x}{2}dx=\frac{x^2}{4}+\frac{e^x}{2}\Big|_0^1=\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$. **C19.** $I=\int_0^3\sqrt{x^2+16}\,dx=x\sqrt{x^2+16}\Big|_0^3-\int_0^3\frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}dx=$ $=15-\int_0^3\frac{x^2+16}{\sqrt{x^2+16}}dx+16\int_0^3\frac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx=15+16\ln\left(x+\sqrt{x^2+16}\right)\Big|_0^3-I$ etc. **C20.** $x^2+e^{-x^2}\geq 1\Rightarrow e^{-x^2}\geq 1-x^2\Rightarrow$ $\Rightarrow\int_0^1 e^{-x^2}dx\geq\int_0^1(1-x^2)\,dx=\frac{2}{3}$.

## 7. Aplicații ale integralei definite

| I1. | I2. | I3. | I4. | I5. | I6. | I7. | I8. | I9. | I10. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{3}$ | $e^3-e$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | $a=1$ | verificare | $6\pi$ | $2\pi$ | $\pi$ | $\pm\sqrt{3}$ | verificare |

**C1.** $\mathcal{A}=\int_1^2(6x^3+2)\,dx=3x^3\Big|_1^2+2x\Big|_1^2=23$. **C2.** $\mathcal{A}=\int_0^1 xe^x dx=(x-1)e^x\Big|_0^1=1$. **C3.** $\mathcal{A}=\int_0^1(x+e^{-x})\,dx=\frac{x^2}{2}-e^{-x}\Big|_0^1=\frac{3}{2}-\frac{1}{e}$. **C4.** $\mathcal{A}=\int_0^2(x+1)e^{-x}dx=-(x+2)e^{-x}\Big|_0^2=2-\frac{4}{e^2}$. **C5.** $\mathcal{A}=\int_0^1(3^x-2^x)\,dx=\frac{3^x}{\ln 3}\Big|_0^1-\frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1=$ $=\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 2}$. **C6.** $\mathcal{A}=\int_1^2(3x^2+2ax+1)\,dx=x^3\Big|_1^2+ax^2\Big|_1^2+x\Big|_1^2=7+3a+1=14\Rightarrow a=2$. **C7.** $\mathcal{A}=$ $=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+3+4x\right)dx=\ln x\Big|_1^2+3x\Big|_1^2+2x^2\Big|_1^2=\ln 2+9$. **C8.** $A=\int_1^a 5x^4dx=a^5-1=31\Rightarrow a=2$. **C9.** $A=\int_1^2 e^x dx\geq$ $\geq\int_1^2(x+1)\,dx=\frac{5}{2}$. **C10.** $\mathcal{V}=\pi\int_1^2(4x^3+3x^2)\,dx=\pi(x^4+x^3)\Big|_1^2=22\pi$. **C11.** $\mathcal{V}=\pi\int_1^4\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right)\Big|_1^4=$ $=\frac{7\pi}{6}$. **C12.** $\mathcal{V}=\pi\int_0^2\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{\pi}{x+1}\Big|_0^2=\frac{2\pi}{3}$. **C13.** $\mathcal{V}=\pi\int_1^a\frac{\ln^2 x}{x}dx=\pi\int_0^1 t^2dt=\frac{\pi}{3}$. **C14.** $\mathcal{V}=\pi\int_0^a 5x^4dx=$ $=\pi x^5\Big|_0^a=\pi x^5=32\pi\Rightarrow a=2$. **C15.** $g(x)=xe^{x^3}dx$. $\mathcal{V}=\pi\int_0^1 x^2e^{2x^3}dx=\frac{\pi}{6}\int_0^2 e^t dt=\frac{\pi(e^2-1)}{6}$. **C16.** $\mathcal{A}=$ $=\int_m^{m+1}(3x^2+1)\,dx=x^3+x\Big|_m^{m+1}=3m^2+3m+2$. $\mathcal{A}_{min}=\frac{5}{4}$. **C17.** $x^{2008}\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{5}\leq f(x)\leq\frac{1}{4}$ etc. **C18.** $\mathcal{A}=$

$= \int_1^3 (-x^2+4x-3)\,dx = -\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\Big|_1^3 = \frac{4}{3}$; $\int_1^a (-x^2+4x-3)\,dx = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$. **C19.** $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 (ax+2)^2\,dx =$ $= \frac{a^2x^3}{3}\Big|_0^1 + 2ax^2\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1 = \left(\frac{a^2}{3}+2a+4\right)\pi$. Volumul este minim dacă $a = -3$. **C20.** $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx \le$ $\le \pi\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{3}$.

## 8. Probleme de sinteză – analiză matematică

**1.** a) $F' = f$; b) $\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 4e - 1$; c) Dacă $G$ e primitivă a lui $F$, atunci $G' = F \Rightarrow G'' = F' = f \ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow G$ convexă. **2.** a) $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+C$; b) $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{x}{x+1}\right)dx = x\Big|_0^1 - \ln(x+1)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$; c) $\int_0^1 f_{2008}(x)dx =$ $= \int_0^1 \frac{x^{2008}}{x+1}\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln 2$. **3.** a) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}$; b) $\int_0^1 xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1$; c) $\int_1^4 \ln(1+\sqrt{x})\,dx \le$ $\le \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{14}{3}$. **4.** a) $\mathcal{V} = \pi\int_1^2 (x^2+1)\,dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right) + x\Big|_1^2 = \frac{10\pi}{3}$; b) $\int_1^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}t\sqrt{t}\Big|_2^5 =$ $= \frac{5\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}$; c) $\int_1^2 e^x(x^2+1)dx = e^x(x^2+1)\Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^x dx = 5e^2 - 2e - 2xe^x\Big|_1^2 + 2e^x\Big|_1^2 = 5e^2 - 2e - 4e^2 + 2e +$ $+ 2e^2 - 2e = 3e^2 - 2e$. **5.** a) $\mathcal{V} = \int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{26}{3}$; b) $F(x) = \frac{x^{2008}}{2008}+\frac{x^2}{2}+x+C$. Din $F(0) = 1 \Rightarrow C = 1$; c) $\lim_{x\to\infty} = \frac{F(x)-F(0)}{x^{2008}} = \frac{1}{2008}$. **6.** a) $\int_a^{e^2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_e^{e^2} = \frac{e^4\cdot e^2}{2}$; b) $I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$; c) $I_{2008} - I_{2007} = \int_1^e x\ln^{2007}x\cdot(\ln x - 1)dx \le 0$. **7.** a) $V = \pi\int_0^1 (x^2+1)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}+x\Big|_0^1\right) = \frac{4\pi}{3}$; b) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_1^2 \sqrt{t}\,dt = \frac{t\sqrt{t}}{3}\Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; c) $\mathcal{A} = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \le \int_0^1 \sqrt{2}dx = \sqrt{2}\cdot x\Big|_0^1 = \sqrt{2} < \frac{3}{2}$. **8.** a) $I_2 = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$; b) $I_6 -$ $- I_2 = \int_0^1 \frac{x^6+1}{x^2+1}\,dx - \int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2(x^4-1)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 (x^4-x^2)dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}-\frac{1}{3} = -\frac{2}{15}$; c) $x \in [0,1] \Rightarrow$ $\Rightarrow x^{2012} \le x^{2011} \Rightarrow I_{2012} \le I_{2011}$. **9.** a) $F' = f$; b) $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 2e^2 - e$; c) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int_2^{1+e} \frac{1}{t}\,dt =$ $= \ln t\Big|_2^{1+e} = \ln\frac{1+e}{2}$. **10.** a) $f$ e continuă pe $\mathbb{R}$; b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (3x^2-2x-6)\,dx = x^3\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3 - 6x\Big|_2^3 = 8$; c) $\mathcal{V} =$





$= \int_0^1 (e^{x-2}+1)dx = \int_0^1 (e^{2x-4}+2e^{x-2}+1)dx = \frac{e^{2x-4}}{2}\Big|_0^1 + 2e^{x-2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{e^{-2}-e^{-4}}{2} + 2e^{-1} - 2e^{-2} + 1$. **11.** a) $\int_0^1 e^x dx =$ $= e - 1$; b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^t dt = \frac{e-1}{2}$; c) $x \in [0,1] \Rightarrow 1 \le e^{x^2} \le e$ și integrăm. **12.** a) $\int_1^2 (x^2-2x+1)dx =$ $= \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}$; b) $\int_0^1 x^2e^x dx = x^2e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx = e - 2xe^x\Big|_0^1 + 2e^x\Big|_0^1 = e - 2$; c) $\mathcal{A} = \int_0^1 (x^2-2mx+m^2)dx =$ $= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - mx^2\Big|_0^1 + mx^2\Big|_0^1 = m^2 - m + \frac{1}{3}$. Minimul se obține pentru $m = \frac{1}{2}$. **13.** a) $a = 2$; b) $\int_1^3 f_2(x)dx = F(3) -$ $- F(1) = 10$; c) $\int_0^1 f_a^2(x)dx = \int_0^1 (a^2x^2+2ax+1)dx = \frac{a^2x^3}{3}\Big|_0^1 + ax^2\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{a^2}{3}+a+1$. Minimul se obține pentru $a = -\frac{3}{2}$ și este egal cu $\frac{1}{4}$. **14.** a) $f_2(x) = 2x^2 - 2x + 1$, $\int f_2(x)\,dx = \frac{2x^3}{3} - x^2 + 1 + C$; b) $\mathcal{A} =$ $= \int_0^1 e^x(2x^2-2x+1)dx = e^x(2x^2-2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x(4x-2)dx = e - 1 - e^x(4x-2)\Big|_0^1 + 4e^x\Big|_0^1 = e - 1 - 2e - 2 +$ $+ 4e - 4 = 3e - 8$; c) $x \in [0,1] \Rightarrow (1-x) \in [0,1] \Rightarrow f_{2008} \ge f_{2009}$ și concluzia. **15.** a) Orice primitivă $F$ are derivata a doua $F''(x) = 1 - \frac{1}{x^2} > 0$; b) $\int_1^e f(x)dx = \frac{x^2}{2} + \ln x\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{2}$; c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$. **16.** a) $\int_0^1 xe^x dx =$ $= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$; b) Fie $F$ o primitivă a lui $f_3 \Rightarrow F' = f_3 \Rightarrow F'' = f'_3 \Rightarrow F'''(x) = (3x+1)e^{3x} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ singurul punct de inflexiune; c) $\int_0^1 f_3(x)dx = \int_0^1 xe^{3x}dx \ge \int_0^1 (3x^2+x)dx = x^3\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2}$. **17.** a) $\int f'(x)dx = \ln x + C$; b) $A = \int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = 1$; c) $x \in [1,e] \Rightarrow \ln x \in [0,1] \Rightarrow e^x \ln x \le e^x \Rightarrow \int_1^e e^x f(x)dx \le \int_1^e e^x dx = e^e - e$. **18.** a) $F'(x) = (x-1)^2 > 0$, $(\forall)\, x \in (1,\infty)$; b) $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$ etc.; c) $V = \pi\cdot\int_{-1}^0 (4x^3-3x^2-1)^2dx =$ $= \pi\int_{-1}^0 (16x^6+9x^4+1-24x^5-8x^3+6x^2)dx$ etc. **19.** a) $\int g(x)dx = -e^{1-x} + C$; b) $V = \pi\int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{\pi e^{2x}}{2}\Big|_0^1 =$ $= \frac{\pi(e^2-1)}{2}$; c) $x \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 1 - x \ge x \Rightarrow e^{1-x} \ge e^x$ și concluzia. **20.** a) Verificare; b) $\int_2^3 f(x)dx = \ln(x-1)\Big|_2^3 -$ $- \ln(x+2)\Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 5 + \ln 4 = \ln\frac{12}{5}$; c) $\int_5^6 f(x)dx \le \int_5^6 \frac{3}{28}\,dx = \frac{3}{28}$.

# Teste pentru Bacalaureat 2015, după modelul M.E.N.

## 1. Subiecte propuse la proba de matematică a examenului de Bacalaureat în perioada 2009-2014

### Testul 1*

**I. 1.** $b_5 = b_2q^3 \Rightarrow q^3 = 8$; $q = 2$. **2.** $f(0) = 7$; $(f \circ f)(0) = f(7) = 70$. **3.** $(x-3)^2 = x-1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$; $x_1 = 2$ nu verifică ecuația și $x_2 = 5$ verifică ecuația. **4.** Numerele divizibile cu 11 din mulțimea $A$ sunt 11, 22, 33 și 44 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile. Numărul elementelor mulțimii $A$ este 50 $\Rightarrow$ 50 de cazuri posibile; $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{2}{25}$. **5.** $\frac{2}{1} = \frac{a+1}{2}$; $a = 3$. **6.** $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{6}$. **II. 1.** a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$; $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$; b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 18$; $\det A + \det B = 4 + 5 = 9 \Rightarrow \det(A+B) >$ $> \det A + \det B$; c) $X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1$; $b = \pm 2 \Rightarrow$ sunt 4 matrice $X$ care verifică cerințele. **2.** a) $f = X^3 + X - 2 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$; b) $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3) = f(2)$; $f(2) =$ $= 10 + a \Rightarrow a = -8$; c) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$, $x_1x_2x_3 = -a$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} +$ $+ \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_1} = 0$, $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{a}$. Un polinom este $g = aX^3 + X^2 + 1$. **III. 1.** a) $f'(x) = (\ln(x+1))' - (\ln x)' =$ $= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$; b) $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in$ $\in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$. **2.** a) $\int_0^1 (x+2)f(x)dx =$ $= \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$; b) $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \Rightarrow f(x) + (x+2)f'(x) = 1$ pentru orice $x \in (-2, +\infty)$; $\int_{2013}^{2014} 1 \cdot dx =$ $= x\Big|_{2013}^{2014} = 1$; c) $\mathcal{V} = \pi \int_1^2 g^2(x)dx = \pi \int_1^2 (x+2)^2 dx = \pi \frac{(x+2)^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{37\pi}{3}$.

### Testul 2

**I. 1.** $3\left(4+\sqrt{3}\right) = 12 + 3\sqrt{3}$, $12 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 12 \in \mathbb{N}$. **2.** $f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = 2(1 + 2 + \ldots + 10) + 30 = 140$. **3.** $x^2 + 8 = 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$. Rezultă $x_1 = 2$ și $x_2 = 4$, care verifică ecuația. **4.** Se notează cu $x$ prețul înainte de





scumpire $\Rightarrow x + 30\% \cdot x = 325$; $x = 250$. **5.** $R$ mijlocul lui $(PQ) \Rightarrow x_R = \frac{x_P + x_Q}{2}$ și $y_R = \frac{y_P + y_Q}{2}$, $x_Q = 5$, $y_Q = 3$. **6.** $\sin 170° = \sin 10°$; $\sin 10° + \sin 30° - \sin 170° = \sin 30° = \frac{1}{2}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4$; b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B \cdot A - A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\det(A + xB) = \begin{vmatrix} -3 & 1+x \\ 2+x & -2 \end{vmatrix} = -x^2 - 3x + 4$; $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -4$ și $x_2 = 1$. **2.** a) $x \circ 3 = 3x - 3(x+3) + 12 = 3$, pentru orice număr real $x$; $3 \circ x = 3x - 3(3+x) +$ $+ 12 = 3 \Rightarrow x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, pentru orice număr real $x$; b) $x \circ x = x^2 - 6x + 12$; $x^2 - 6x + 12 = x \Rightarrow x^2 - 7x + 12 =$ $= 0$; $x_1 = 3$ și $x_2 = 4$; c) $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2014 = (1 \circ 2) \circ 3 \circ (4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2014) = 3 \circ (4 \circ 5 \circ \ldots \circ 2014) = 3$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(e^x\right)' - x' = e^x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$; $f(0) = 1$; $f'(0) = 0 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = 1$; c) $f'(0) = 0$; $\Rightarrow f'(x) < 0$, pentru $x \in (-\infty, 0)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (0, +\infty)$; $f(x) \geq f(0) \Rightarrow$ $\Rightarrow e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **2.** a) $\int_1^2 \left(3 - f(x)\right)dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2$; b) $f(x) = 3 - \frac{1}{x} \Rightarrow$ o primitivă $F$ a funcției $f$ este de forma $F(x) = 3x - \ln x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$; $F(1) = 3 \Leftrightarrow c = 0 \Rightarrow F(x) = 3x - \ln x$; c) $\mathcal{V} = \pi \int_1^2 g^2(x)\,dx =$ $= \pi \int_1^2 (3x-1)^2 dx = \pi \int_1^2 (9x^2 - 6x + 1)\,dx = \pi(3x^3 - 3x^2 + x)\Big|_1^2 = 13\pi$.

### Testul 3*

**I. 1.** $z^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3i + (3i)^2 = -5 + 12i$. **2.** $f(x) = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = 0$; $x = 3$ și $y = 0$. **3.** $x^2 + 5 = 9 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$; $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația. **4.** Sunt 7 numere de două cifre divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile. Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile; $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$. **5.** $AB = 4$, $CO = 3$ și $CO$ este înălțime; $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. **6.** $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **II. 1.** a) $\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$ $= 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 6$; b) $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 \\ 1-a & 2 \end{vmatrix} = 5a + 1$; $5a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$; c) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(A(0)) = 1$; $(A(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** a) $1 \circ 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 6 = 1$; b) $x \circ y = 2\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) =$ $= 2\left(x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right)\right) + \frac{3}{2} = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. **III. 1.** a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{e^{-x}}{x-2} = \frac{e^{-1}}{1-2} = -\frac{1}{e}$; b) $f'(x) = \frac{(e^{-x})' \cdot (x-2) - e^{-x} \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} =$

$= \frac{-e^{-x}\cdot(x-2)-e^{-x}}{(x-2)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot(x-1)}{(x-2)^2} = \frac{(1-x)e^{-x}}{(x-2)^2}$, $x \in (-\infty, 2)$; c) $f'(1) = 0$, $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, 1)$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in (1, 2)$; $f(x) \le f(1) \Rightarrow f(x) \le -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (-\infty, 2)$. **2.** a) $\int_1^2 (x+1)f(x)dx =$ $= \int_1^2 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 1\, dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1$; b) $\int_1^e \big(f(x)+(x+1)\cdot f'(x)\big)dx = \int_1^e \big((x+1)\cdot f(x)\big)'\, dx =$ $= (x+1)f(x)\Big|_1^e = \ln e = 1$; c) $\mathcal{V} = \pi\int_2^3 g^2(x)\, dx = \pi\int_2^3 (x+1)^2 dx = \pi\cdot\frac{(x+1)^3}{3}\Big|_2^3 = \frac{37\pi}{3}$.

## Testul 4

**1.** 1. $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$; $3\cdot\frac{1}{3}=1$. **2.** $m-4=1$; $m=5$. **3.** $2x^2+1=1$, $x=0$, care verifică ecuația. **4.** $100000 = 4\%\cdot x$, unde $x$ reprezintă venitul anual al firmei; $x = 2500000$ de lei. **5.** $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$; $AB^2+AC^2=BC^2$, deci $\Delta ABC$ este dreptunghic. **6.** $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$ și $\operatorname{tg}45^\circ=1$; $\operatorname{tg}^2 60^\circ+\operatorname{tg}^2 45^\circ=3+1=4$. **II.** 1. a) $\det A=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-$ $-1\cdot(-5)=-1$; b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 2A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$; c) $A\cdot A=$ $=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-xA=\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=1$. **2.** a) $1*2=2(1+2-1)-$ $-1\cdot 2=4-2=2$; b) $x*2=2(x+2-1)-x\cdot 2=2$; $2*x=2(2+x-1)-2x=2=x*2$ pentru orice număr real $x$; c) $-x^2+4x-2=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$; $x_1=1$ și $x_2=2$. **III.** 1. a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x=-1\cdot e^0=-1$; b) $f'(x)=$ $=1\cdot e^x+(x-1)e^x=e^x+f(x)$ pentru orice număr real $x$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$. **2.** a) $\int_1^2 3x^2dx=$ $=x^3\Big|_1^2=8-1=7$; b) O primitivă $F$ a funcției $f$ este de forma $F(x)=x^3+x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$; $F(1)=2+c\Rightarrow c=$ $=2012\Rightarrow F(x)=x^3+x^2+2012$; c) $\int_1^n \frac{f(x)}{x}\,dx=\int_1^n (3x+2)dx=\frac{3n^2+4n-7}{2}$; $\frac{3n^2+4n-7}{2}=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 3n^2+4n-20=$ $=0\Rightarrow n_1=-\frac{10}{3}$ nu este număr natural și $n_2=2$.

## Testul 5*

**I.** 1. $z=3+2-2i=5-2i$, deci partea reală a numărului $z$ este egală cu 5. **2.** $x_1+x_2=3$, $x_1x_2=10$; $x_1+x_2+2x_1x_2=$ $=3+2\cdot 10=23$. **3.** $x^2+x+1=1\Rightarrow x^2+x=0$; $x_1=-1$ și $x_2=0$, care verifică ecuația. **4.** Cifra unităților poate fi aleasă în două moduri. Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în două moduri, iar cifra sutelor poate fi aleasă într-un singur mod. Se pot forma $2\cdot 2\cdot 1=4$ numere. **5.** $a-1=2$; $a=3$. **6.** $\mathcal{A}=\frac{\pi}{2}$; $R=\frac{5}{2}$.





**II.** 1. a) $\det(A(2))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=3$; b) $A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 1\\ 1 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-x^2+1 & 0\\ 0 & -x^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$; c) $A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix}1+2+\ldots+n & n\\ n & 1+2+\ldots+n\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2} & n\\ n & \frac{n(n+1)}{2}\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n\cdot n=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul $n$. **2.** a) $2*4=4(2+4-3)-2\cdot 4=12-8=4$; b) $x*y=4x+4y-12-xy=4-xy+4x+4y-16=$ $=4-x(y-4)+4(y-4)=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $x*x=4-(x-4)^2\Rightarrow x*x*x=4+$ $+(x-4)^3$; $(x-4)^3=x-4\Rightarrow x=3$ sau $x=4$ sau $x=5$. **III.** 1. a) $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}(x\ln x-x+1)=e\ln e-e+1=1$; b) $f'(x)=(x\ln x-x+1)'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$; c) $f'(1)=0$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(0,1)$ și $f'(x)>0$ pentru $x\in(1,+\infty)$; $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$. **2.** a) $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)\,dx=\int_0^{2014}1\,dx=x\Big|_0^{2014}=2014$; b) $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\big(f^2(1)-f^2(-1)\big)=$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{576}-\frac{1}{64}\right)=-\frac{1}{144}$; c) $\mathcal{A}=\int_0^a |f(x)|\,dx=\int_0^a \frac{1}{(x+4)^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{x+3}{x+5}\Big|_0^a=\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}$; $\frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{10}{9}\Rightarrow a=1$.

## Testul 6

**I.** 1. $5\left(2+\sqrt{3}\right)=10+5\sqrt{3}$, $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10$. **2.** $f(1)=a\Rightarrow 1+3=a$; $a=4$. **3.** $2x+1=5$, $x=2$, care verifică ecuația. **4.** Sunt 9 numere de două cifre care sunt divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile. Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile; $p=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$. **5.** $AB=\sqrt{(2-3)^2+(5-5)^2}$, $AB=1$. **6.** $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$. **II.** 1. a) $\det A=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-1\cdot 8=0$; b) $B+C=\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow x=6$; c) $B\cdot B=$ $=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; $B\cdot B+B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$. **2.** a) $0\circ(-4)=0\cdot(-4)+$ $+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=-16+12=-4$; b) $x\circ y=xy+4x+4y+16-4=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $(x+4)^2-4=12$; $x^2+8x=0\Rightarrow x_1=-8$ și $x_2=0$. **III.** 1. a) $f'(x)=\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$; c) $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$, $f(1)=-1$,

$f'(1)=2$, deci ecuația tangentei este $y=2x-3$. **2.** a) $\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$; b) $F'(x)=\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)'=$

$=e^x-x=f(x)$ pentru orice număr real $x$, deci $F$ este o primitivă a funcției $f$; c) $\int_0^1 F(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)dx=$

$=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\frac{x^2}{2}dx-\int_0^1 dx=e^x\Big|_0^1-\frac{x^3}{6}\Big|_0^1-x\Big|_0^1=e-1-\frac{1}{6}-1=e-\frac{13}{6}$.

## Testul 7*

**I. 1.** $z^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$. **2.** $f(m)=1$; $m-3=1\Leftrightarrow m=4$. **3.** $x-3=9$; $x=12$, care verifică ecuația. **4.** Numărul submulțimilor cu un număr impar de elemente ale unei mulțimi cu 4 elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=$ $=8$. **5.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}$. **6.** $\cos C=\sin B$, $\sin C=\cos B$, $\sin B\cdot\cos C+$ $+\sin C\cdot\cos B=\sin^2 B+\cos^2 B=1$. **II. 1.** a) $\det A=\begin{vmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\cdot(-1)-1\cdot 2014=-2014$; b) $A\cdot A=$

$=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}$; $A+A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2014\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2014 & -2014\\ -1 & 2015\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2014 & 0\\ 0 & 2014\end{pmatrix}=2014I_2$;

c) $A^{-1}=\frac{1}{2014}\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $X=2014A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2014\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. **2.** a) $f(0)=0^3-6\cdot 0^2+m\cdot 0-6=-6$; b) $x_1+x_2+x_3=6$,

$x_1x_2x_3=6$, $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{6}=1$; c) $f$ are rădăcinile $x_1=k-1$, $x_2=k$ și $x_3=k+1$, unde

$k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x_1+x_2+x_3=3k\Rightarrow k=2$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot 3\Rightarrow m=11$.

**III. 1.** a) $f'(x)=\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$; b) $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, $f(1)=\frac{1}{2}$,

$f'(1)=0$, deci ecuația tangentei este $y=\frac{1}{2}$; c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=-1$; $f'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$, $f'(x)>0$ pentru $x\in(-1,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,+\infty)$. Punctele de extrem sunt $x=-1$ și $x=1$.

**2.** a) $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln 2$; b) $F$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F''(x)=f'(x)=$

$=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+3)^2}$; $F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci $F$ este concavă pe $(-1,+\infty)$;

c) $\mathcal{A}=\int_0^n|f(x)|\,dx=\int_0^n\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\ln\left((x+1)(x+2)(x+3)\right)\Big|_0^n=\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$, $n\geq 1\Rightarrow$

$\Rightarrow(n+1)(n+2)(n+3)\geq 24\Rightarrow\mathcal{A}\geq\ln 4$ pentru orice număr natural nenul $n$.





## Testul 8

**I. 1.** $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$. **2.** $f(0)=4$. Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=0$ și $y=4$. **3.** $3x-1=2$; $x=1$. **4.** Numerele naturale de o cifră mai mici sau egale cu 3 sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile. Sunt 10 numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile; $p=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. **5.** $AB=3$; $BC=3\Rightarrow AB=BC$. **6.** $AC=8$; $\mathcal{A}_{MABC}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$. **II. 1.** a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 2=0$; b) $A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot$

$\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=5A$; c) $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0$, $y=-2$. **2.** a) $(-1)\circ 1=-1+1+(-1)\cdot 1=0-1=-1$; b) $x\circ y=x+xy+y+1-1=x(y+1)+$

$+(y+1)-1=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $(x+2)(x-2)-1=4\Leftrightarrow x^2-9=0$; $x_1=-3$

și $x_2=3$. **III. 1.** a) $\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x-2}=\frac{3-1}{3-2}=2$; b) $f'(x)=\frac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=$

$=-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$; c) $y-f(3)=f'(3)(x-3)$; $f(3)=2$, $f'(3)=-1$, deci ecuația tangentei este $y=-x+5$.

**2.** a) $\int_{-1}^1(2x+1)dx=(x^2+x)\Big|_{-1}^1=2-0=2$; b) $\mathcal{V}=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$; c) $F$ este o primitivă a

funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$; $F'(x)=(x+1)^2\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția $F$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

## Testul 9*

**I. 1.** $x+2=\frac{2+10}{2}$; $x=4$. **2.** $\Delta=44$. Valoarea minimă a funcției $f$ este egală cu $-\frac{\Delta}{4a}=-11$. **3.** $x^2-2x-8=0$;

$x_1=-2$ și $x_2=4$, care verifică ecuația. **4.** Sunt 45 de numere pare de două cifre, deci sunt 45 de cazuri favorabile. Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile; $p=\frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$.

**5.** $\vec{u}=-\vec{v}\Leftrightarrow a-2=-3$; $a=-1$. **6.** $\cos A=\frac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{8}$. **II. 1.** a) $\det B=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-1-0-0=-1$;

b) $AB=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=BA$; c) $\det(B+xA)=\begin{vmatrix}0 & x & 1\\ x & 1 & x\\ 1 & x & 0\end{vmatrix}=2x^2-1$; $2x^2-1=1\Leftrightarrow x_1=-1$ și

$x_2=1$. **2.** a) $4*5=4\cdot 5-4(4+5-5)=4$; b) $x*y=xy-4x-4y+16+4=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$

pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $x*4=4*x=4$ pentru orice număr real $x$; $1*2*3*\ldots*2014=(1*2*3)*4*$

$*(5*\ldots*2014)=4*(5*\ldots*2014)=4$. **III. 1.** a) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2+3}$; b) $f'(x)=\frac{(x^2-3)'(x^2+3)-(x^2-3)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=$

$= \frac{2x((x^2+3)-2x(x^2-3)}{(x^2+3)^2} = \frac{12x}{(x^2+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$; c) $f''(x) = \frac{36(1-x^2)}{(x^2+3)^3}$, $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(-1, 1)$. **2.** a) $\int_1^e f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2} f^2(x)\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(f^2(e) - f^2(1)\right) = \frac{1}{2}$; b) $\int_1^e x^3 f(x)\,dx =$ $= \int_1^e \left(\frac{x^4}{4}\right)' \ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16}\Big|_1^e = \frac{3e^4+1}{16}$; c) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e =$ $= (e\ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$.

## Testul 10

**I. 1.** $\frac{a}{2} - \frac{2}{a} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$. **2.** $2x - 3 = x + 1$; $x = 4$. **3.** $x^2 + 5 = 9$; $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația. **4.** $\frac{10}{100}\cdot 120 = 12$. După scumpire, prețul imprimantei este $120 + 12 = 132$ de lei. **5.** $AB = 3$, $BC = 4$ și $AC = 5$; $\mathcal{P}_{\Delta ABC} =$ $= 3 + 4 + 5 = 12$. **6.** $\cos A = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - 1\cdot 2 = -2$; b) $A + B = \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} b & b+2 \\ b & b \end{pmatrix}$, $AB + C = \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ b & b \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+1 & b+2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 1$; c) $\det(B + 2C) = \begin{vmatrix} b+2 & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= b + 2$; $\det B = b \Rightarrow \det B - \det A = b + 2 \Rightarrow \det(B + 2C) = \det B - \det A$ pentru orice număr real $b$. **2.** a) $f(1) =$ $= 1^3 - 4\cdot 1^2 + 1 + 2 = 1 - 4 + 3 = 0$; b) Câtul este $X^2 - 3X - 2$. Restul este 0; c) $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1x_2 + x_3x_3 +$ $+ x_1x_3 = 1$, $x_1x_2x_3 = -2$, $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}{x_1x_2x_3} = -2$. **III. 1.** a) $\lim_{x\to 1} f(x) =$ $= \lim_{x\to 1}(x^2 - \ln x) = 1^2 - \ln 1 = 1$; b) $f'(x) = (x^2 - \ln x)' = (x^2)' - (\ln x)' = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$; c) $f''(x) = (2x)' -$ $- \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 + \frac{1}{x^2} > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția $f$ este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$. **2.** a) $\int_0^1 x^2\,dx =$ $= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$; b) $\mathcal{A} = \int_0^1 \left|\frac{x^2}{x+1}\right| dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right)\Big|_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$; c) $F$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$; $F'(x) = \frac{x^2}{x+1} \geq 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci funcția $F$ este crescătoare pe $(-1, +\infty)$.

## Testul 11

**I. 1.** $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$; $2\sqrt{7} + 2 - 2\sqrt{7} = 2$. **2.** $f(1) + f(2) + \ldots + f(10) = 2(1 + 2 + \ldots + 10) - 10 = 100$. **3.** $4^{x+1} = 4^2$; $x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$. **4.** Multiplii lui 7 din mulțimea $A$ sunt 7 și 14 $\Rightarrow$ 2 cazuri favorabile. Numărul de elemente ale





mulțimii $A$ este 15 $\Rightarrow$ 15 cazuri posibile. $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{2}{15}$. **5.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\vec{i}$; $AC = 3$. **6.** $\sin x = \cos x$; $x = \frac{\pi}{4}$. **II. 1.** a) $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$; b) $A(1)\cdot A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = 5A(1)$; c) $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 2x^3 - 3x^2 + 1$; $\det(A(x)) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x =$ $= -\frac{1}{2}$ sau $x = 1$. **2.** a) $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 3$; $f(1) = 1 - 2 - 2 + 3 = 0$; b) $f(2) = 2 \Rightarrow 8 - 8 - 4 + m = 2$; $m = 6$; c) $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2$, $x_1x_2x_3 = -4$, $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 2\cdot\frac{-2}{-4} = 1$. **III. 1.** a) $f'(x) =$ $= x^n \cdot \ln x + x\cdot(\ln x)' = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$; b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$; c) $f''(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$; $f''(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ convexă pe intervalul $(0, +\infty)$. **2.** a) $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx =$ $= \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$; b) $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$; c) $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 h^2(x)dx =$ $= \pi\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{28\pi}{15}$.

## Testul 12

**I. 1.** $3\left(2 + \sqrt{2}\right) = 6 + 3\sqrt{2}$, $6 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 6$. **2.** $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$; $f(-2)\cdot f(0) = -1$. **3.** $x^2 + 1 = 1$, $x = 0$. **4.** $10\% \cdot$ $\cdot 1000 = 100$. Prețul după ieftinire este 900 de lei. **5.** $M$ mijlocul lui $(PR) \Rightarrow x_M = \frac{x_P + x_R}{2}$ și $y_M = \frac{y_P + y_R}{2}$, $x_M = 2$, $y_M = 2$. **6.** $\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$, $\cos B = \frac{12}{13}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$; b) $A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A\cdot A - xI_2 = \begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix}$, $A\cdot A - xI_2 = A \Leftrightarrow x = 1$; c) $\det(M + A) = \begin{vmatrix} m+1 & m+1 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 -$ $- m$, $m = -1$ sau $m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sau $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.** a) $5 * (-5) = 5 + (-5) - 2 = -2$; b) $x * y = x + y -$ $- 2$ și $y * x = y + x - 2$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, $x * y = y * x$, pentru orice numere reale $x$ și $y$; c) $(-3) *$ $* (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3 = ((-3) * 3) * ((-2) * 2) * ((-1) * 1) * 0 = (-2) * (-2) * (-2) * 0 = -12$. **III. 1.** a) $f'(x) =$ $= x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $f''(x) = (x + 2)e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) =$ $= (x + 2)e^x + xe^x = 2(x + 1)e^x = 2f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, $f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ pentru

$x \in (-\infty, -1)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ funcția $f$ are un punct de extrem, $x = -1$. **2.** a) $\int_4^5 xf(x)\,dx = \int_4^5 1 \cdot dx =$ $= x\Big|_4^5 = 1$; b) $F'(x) = (4 + \ln x)' = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției $f$; c) $\mathcal{A} = \int_5^a |f(x)|dx = \int_5^a \frac{1}{x}\,dx = \ln a - \ln 5 = \ln 3 \Rightarrow a = 15$.

## Testul 13

**I. 1.** $2(1+i) = 2 + 2i$, $x = 2 \in \mathbb{R}$. **2.** $f(2) = 0$, $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(5) = 0$. **3.** $x^2 + 1 = x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1$. Rezultă $x = 0$, care verifică ecuația. **4.** Numerele de două cifre având produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 și 51 $\Rightarrow$ 2 cazuri favorabile. Numărul numerelor naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri. $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{1}{45}$. **5.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. **6.** $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 = -1$; b) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix}$, $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$; c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** a) $2 * 2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4} = \sqrt{12}$; b) $\sqrt{x^2 + x^2 + 4} = \sqrt{12} \Leftrightarrow 2x^2 + 4 = 12$, $x = -2$ sau $x = 2$; c) $\underbrace{1*1*\ldots*1}_{1 \text{ de 8 ori}} = \sqrt{8 \cdot 1^2 + 4 \cdot (8-1)} = \sqrt{36}$, $\underbrace{1*1*\ldots*1}_{1 \text{ de 8 ori}} =$ $= 6 \in \mathbb{Z}$. **III. 1.** a) $f'(x) = (e^x)'(x^2 - 6x + 9) + e^x(x^2 - 6x + 9) = e^x(x^2 - 6x + 9) + e^x(2x - 6) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $f''(x) = e^x(x^2 - 2x - 1)$, $f(x) + f'(x) = e^x(2x^2 - 8x + 8) = 2(f'(x) + e^x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 3$, $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in (1, 3)$ și $f'(x) > 0$ pentru $x \in (3, +\infty)$. Punctele de extrem sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$. **2.** a) $\int_0^1 (x+1)f(x)dx = \int_0^1 \frac{x(x+1)}{x+1}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$; b) $\int_0^1 x^2 f(x)dx +$ $+ \int_0^1 x^3 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^4}{x+1}dx = \int_0^1 \frac{x^3(x+1)}{x+1}dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$; c) $\mathcal{V} = \pi\int_1^2 h^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 dx =$ $= \pi\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \pi\left(x - 2\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{3}{2} - 2\ln 2\right)$.

## Testul 14

**I. 1.** $3\left(2 - \sqrt{2}\right) = 6 - 3\sqrt{2}$, $6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6$. **2.** $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(0) \cdot f(2) = -1$. **3.** $5^{x-2} = 5^2$, $x = 4$. **4.** $10\% \cdot$ $\cdot 100 = 10$. Prețul după scumpire este 110 lei. **5.** $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2}$, $AB = 2$. **6.** $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,





$\cos 45° + \cos 135° = 0$. **II. 1.** a) $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(0)$; b) $\det(M(a)) =$ $= \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{vmatrix} = 4a^2$, $4a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$; c) $M(-2) + M(-1) + M(0) + M(1) + M(2) = (M(-2) + M(2)) + (M(-1) + M(1)) +$ $+ M(0) = 3M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** a) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$; b) Câtul este $X$. Restul este $-X + 1$; c) $x_1 +$ $+ x_2 + x_3 = 2$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2 \cdot 0 = 4$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $2\sqrt{x}f'(x) = 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$; b) $y - f(4) = f'(4)(x - 4)$, $f(4) = 1$, $f'(4) = \frac{1}{4} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = \frac{1}{4}x$; c) $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$. **2.** a) $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = \int_1^2 (2x+1)\,dx = (x^2 + x)\Big|_1^2 = (4 + 2) - (1 + 1) = 4$; b) $F'(x) = (x^2 + x + \ln x)' = 2x + 1 + \frac{1}{x}$, $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției $f$; c) $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\,dx = \int_1^2 \left(2x + 1 + \frac{1}{x}\right)dx = (x^2 + x + \ln x)\Big|_1^2 = 4 + 2 + \ln 2 - 1 - 1 - \ln 1 = 4 + \ln 2$.

## Testul 15

**I. 1.** $\sqrt{8} = 2\sqrt{7}$, $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6 = 6 \in \mathbb{N}$. **2.** $f(0) = 1$, $(f \circ f)(0) = f(1) = 4$. **3.** $x^2 + 1 = 5$. Rezultă $x = -2$ sau $x = 2$, care verifică ecuația. **4.** Se notează cu $x$ prețul inițial $\Rightarrow 20\% \cdot x = 200$; $x = 1000$, deci prețul după ieftinire este 800 de lei. **5.** $\vec{u} = -\vec{v} \Rightarrow a - 1 = -2$, $a = -1$. **6.** $M$ mijlocul lui $(BC) \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$, $AM = 5$. **II. 1.** a) $1 - 2 + 2 \cdot 1 =$ $= a$, $2 \cdot 1 - 2 = 0$ și $2 - 1 = 1$, $a = 1$; b) Determinantul sistemului este $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 0 - 0 - 0 - 2 = 3$; c) $x =$ $= 0$, $y = 0$, $z = -1$. **2.** a) $f = X^3 - X - 2 \Rightarrow f(2) = 2^3 - 2 - 2 = 4$; b) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2$; c) $k \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a lui $f \Rightarrow k^3 - k + a = 0$, $a = -(k-1) \cdot$ $\cdot k \cdot (k+1) \Rightarrow a$ este un număr întreg multiplu de 6, deoarece este divizibil cu trei numere întregi consecutive. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x\right)' = 2\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$; b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $f'(x) <$ $< 0$, pentru $x \in (0, 2)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$. Punctul de extrem este $x = 2$; c) $f''(x) = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)' =$ $= \frac{1 \cdot x^2 - (x-2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{4 - x}{x^3}$, $x \in (0, 4) \Rightarrow 4 - x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0, 4)$.

**2.** a) $\int_2^4 (x-1)f(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{x+1}\,dx = \ln(x+1)\Big|_2^4 = \ln\frac{5}{3}$; b) $\int_2^3 (x^3-1)\frac{1}{x^2-1}dx = \int_2^3 \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx = \int_2^3 \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big|_2^3 = \frac{5}{2}+\ln\frac{4}{3}$; c) $\mathcal{A} = \int_2^3 |f(x)|\,dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

## Testul 16

**I. 1.** $2\left(5-\sqrt{2}\right) = 10-2\sqrt{2}$, $10-2\sqrt{2}+2\sqrt{2} = 10$. **2.** $f(-3) = 0, f(3) = 0, f(-3)+f(3) = 0$. **3.** $5^{2x} = 5^2$, $x = 1$. **4.** $20\% \cdot 100 = 20$. Prețul după scumpire este 120 de lei. **5.** $AB = \sqrt{(3-1)^2+(1-1)^2}$, $AB = 2$. **6.** $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30° + \cos 150° = 0$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-0 = 1$; b) $x = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$; c) $A+B = \begin{pmatrix} 1+x & -2 \\ 0 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = (1+x)^2$, $(1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. **2.** a) $2 \circ (-2) = 2+(-2)+3 = 3$; b) $x \circ (-3) = x+(-3)+3 = x$, pentru orice număr real $x$, $(-3)\circ x = (-3)+x+3 = x \Rightarrow x \circ (-3) = (-3)\circ x = x$, pentru orice număr real $x$; c) $2013 \circ (-2013) = 3$, $3 = x \circ x \Leftrightarrow 3 = 2x+3 \Leftrightarrow x = 0$. **III. 1.** a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$; b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$; c) $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$, $f'(1) = -1$, $f(1) = 2 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = -x+3$. **2.** a) $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1)-f(0) = 3$; b) $F'(x) = (x^3+x+1)' = 3x^2+1$, $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției $f$; c) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 (3x^2+1)\,dx = (x^3+1)\Big|_0^1 = 2$.

## Testul 17

**I. 1.** $3(2+5i) = 6+15i$, $5(1+3i) = 5+15i$, $a = 1 \in \mathbb{R}$. **2.** $f(x) = 0 \Rightarrow (x+5)^2 = 0$, $x = -5$ și $y = 0$. **3.** $x^2+x+1 = x+2$. Rezultă $x = -1$ sau $x = 1$, care verifică ecuația. **4.** Se notează cu $x$ prețul înainte de ieftinire $\Rightarrow x - \frac{10}{100}\cdot x = 90$, $x = 100$. **5.** $d \parallel h \Rightarrow m_d = m_h = 1$, $d: y-2 = 1\cdot(x-2)$, deci $d: y = x$. **6.** $\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{25+36-49}{2\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{5}$. **II. 1.** a) $A(2)+A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A(4)$; b) $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3-x$, $3-x = 0 \Rightarrow x = 3$; c) $\det(A(2)) = 1$, $(A(2))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. **2.** a) $f(-1) = -1+1-m+m = 0$. Rezultă $X+1$ divide polinomul $f$; b) $x_1+x_2+x_3 = -1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = m$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1-2m$, $1-2m = 11 \Rightarrow m = -5$; c) $x_1 = -1 \Rightarrow |x_2| = |x_3| = 1$, $x_1x_2x_3 = -m$, $|m| = 1 \Rightarrow m = -1$ sau $m = 1$; ambele valori verifică cerința. **III. 1.** a) $f'(x) = x' - (\ln x)' = 1-\frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$; b) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 0 \Rightarrow$ ecuația tangentei este $y = 1$; c) $f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$, pentru $x \in (0,1)$ și $f'(x) > 0$, pentru $x \in (1,+\infty)$, $f(x) \geq f(1) \Rightarrow x \geq \ln x + 1$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$. **2.** a) $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}\,dx = \int_2^3 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_2^3 = \frac{15}{2}-4 = \frac{7}{2}$;

b) $f(x) = x^3-x \Rightarrow$ primitiva $F$ a funcției $f$ este $F(x) = \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+c$, unde $c \in \mathbb{R}$. $F(1) = -1 \Rightarrow c = -\frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}$; c) $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}\,dx = \int_2^e x\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_2^e - \frac{1}{2}\int_2^e x\,dx = \frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

## Testul 18

**I. 1.** $3\left(4-\sqrt{3}\right) = 12-3\sqrt{3}$, $12-3\sqrt{3}+3\sqrt{3} = 12$. **2.** $f(-4) = 0, f(4) = 0 \Rightarrow f(-4)+f(4) = 0$. **3.** $(x-2)^2 = x^2-4x+4$, $x = 3$. **4.** $\frac{30}{100}\cdot 100 = 30$. Prețul după ieftinire este 70 de lei. **5.** $AB = \sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}$, $AB = 3$. **6.** $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos^2 A = \frac{3}{4}$, $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4-0 = 4$; b) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 2b & 2-2b \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$, $A\cdot B = 2I_2 \Leftrightarrow b = 1$; c) $A+B = \begin{pmatrix} 2+b & -1 \\ 0 & 2+b \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = (2+b)^2$, $(2+b)^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$. **2.** a) $f(1) = 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1 = 1-3+2 = 0$; b) Câtul este $X^2-X$. Restul este 0; c) $x_1+x_2+x_3 = 3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = 2$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 3^2-2\cdot 2 = 5$. **III. 1.** a) $f'(x) = (x^3+6x^2+12x+8)' = 3x^2+12x+12$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $f'(x) = 3(x+2)^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+12x+12}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{12}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^2} = 3$. **2.** a) $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)' = x^2+1$, $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este primitivă a funcției $f$; b) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}$; c) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}+\ln 2$.

## Testul 19

**I. 1.** $a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$, $a_3 = 0$. Finalizare: produsul este egal cu 0. **2.** $\Delta = 4 + 4m < 0$, $m \in (-\infty, -1)$. **3.** $x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$, $x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine. **4.** $p = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}}$. Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile. Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile. $p = \frac{1}{300}$. **5.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. **6.** $B(0, 1)$ și $C(3, 1) \Rightarrow$ $\Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde $H$ este ortocentrul triunghiul $ABC$, $BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{y_H - 1}{1} \cdot \frac{-2}{2} = -1$, $y_H = 2$. **II. 1.** a) Suma elementelor matricei $A$ este egală cu $1 + (2n+1) + n + 1 + (2n^2+1) + n^2 + 1 = 3n^2 + 3n + 5$; b) $\det A = n^2 - n$. Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$; c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|$, $n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ sau $n = -3$. Finalizare: $n = 2$. **2.** a) $2011 \circ 2012 = 2011 + 2012 + 1 = 4024$; b) $(x \circ y) \circ z = x + ay + az + 2$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \circ (y \circ z) = x + ay + a^2 z + a + 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$; c) $2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$. Finalizare: $x = 0$. **III. 1.** a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$, $f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$; b) $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. Ecuația tangentei este $y = 2x - 1$; c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$. **2.** a) $\int_0^1 f_1(x)dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = ((x+1)e^x - e^x)\Big|_0^1 = e$; b) $f_{2011}$ derivabilă și $f'_{2011}(x) = ((x+2011)e^x)' = e^x + (x+2011)e^x = (x+2011)e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{2011} = f_{2012}$; c) $(x+n)e^x \geq$ $\geq (x+n)(x+1)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 (x+n)e^x dx \geq \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx$; $\int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx =$ $= \left(\frac{x^3}{3} + (n+1)\frac{x^2}{2} + nx\right)\Big|_0^1 = \frac{9n+5}{6}$.

## Testul 20

**I. 1.** $9x^2 + 12x = 0$, $x = 0$ sau $x = -\frac{4}{3}$. **2.** $-\frac{b}{2a} = \frac{3m}{2}$, $\frac{3m}{2} = \frac{3}{2}$, $m = 1$. **3.** $3^{2x} = 3^2$, $2x = 2 \Rightarrow x = 1$. **4.** $C_4^2 = 6$, $A_5^2 = 20$, $5C_4^2 - A_5^2 = 10$. **5.** $C$ mijlocul lui $(AB) \Rightarrow x_C = \frac{x_A + x_B}{2}$ și $y_C = \frac{y_A + y_B}{2}$, $x_C = -2$, $y_C = 4$. **6.** $\text{m}(\sphericalangle BAD) =$ $= 60°$, $\Delta ABD$ este echilateral, $BD = 4$. **II. 1.** a) $\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta(1) = 0$; b) $\Delta(x) = 2 + 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 + x^2 +$ $+ x^2 - 8$; c) $\Delta(0) = -6$, $(A(0))^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **2.** a) $f(1) = 1^3 - 1^2 + a \cdot 1 + b$, $a + b = 0$; b) $f = X^3 - X^2 - X +$ $+ 1 \Rightarrow f = (X-1)^2(X+1)$. Finalizare: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$; c) $f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$, $f(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = -4$. Finalizare: $a = -4$, $b = 4$. **III. 1.** a) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$; b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$, $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right) \Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$; c) $f'(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0, \frac{1}{e}\right]$. Din tabelul de variație al funcției obținem $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) =$ $= -\frac{1}{e}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$. **2.** a) $F'(x) = \left(x - \frac{1}{x} + \ln x\right)' = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$, $F$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ și $F' = f$; b) $\int_1^e x \cdot f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e f(x^2) \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t} + \ln t\right)\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2} + 2\right)$; c) $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = \left(x - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^a =$ $= a - \frac{1}{a}$, $a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 2$ sau $a = -\frac{1}{2}$. Finalizare: $a = 2$.

## Testul 21

**I. 1.** $a_9 = a_4 + 5r \Rightarrow r = 3$; $a_{14} = a_9 + 5r = 37$. **2.** $A$ este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f$ și $g$: $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 3 = 5 - x$; $x - 3 = 5 - x \Rightarrow x_A = 4$; $y_A = 1$. **3.** $2^{3-x} = 2^{-2}$; $3 - x = -2 \Rightarrow x = 5$. **4.** Numărul tripletelor $(a, b, c)$, cu $a, b, c$ distincte din $M$, este $A_4^3$. Numărul tripletelor $(0, b, c)$, cu $b, c$ distincte nenule din $M$, este $A_3^2$; $A_4^3 - A_3^2 = 18$ numere. **5.** Fie $C$ simetricul lui $A$ față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului $(AC)$; $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_C = 5$, $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2$. **6.** $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$; $BC = \sqrt{31}$. **II. 1.** a) $\Delta =$ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 4$; b) Matricea asociată sistemului este inversabilă $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; c) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$; $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. **2.** a) $x * 1 = x + 1 - 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$; b) $x * x = 2x - 1$; $(x * x) * x = 3x - 2$; $x = 2$; c) $C_n^1 = n$, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, $n^2 + n - 30 = 0$; $n = 5$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot e^x - (x+1) \cdot (e^x)'}{e^{2x}} = -\frac{x}{e^x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$; b) $f'(x) = -\frac{x}{e^x} \Rightarrow f'(x) < 0$, oricare ar fi $x > 0$; c) $g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$; $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$; $n = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) - mx\big) =$ $= 2$; $y = x + 2$ este ecuația asimptotei oblice la graficul lui $g$. **2.** a) $\int f(x)dx = \frac{x^{2013}}{2013} + \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$; $F(x) = \frac{x^{2013}}{2013} + \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$ și $F(0) = 1 \Rightarrow c = 1$; $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^{2013}}{2013} + \frac{x^{2012}}{2012} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$;

b) $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}dx = \int_0^1 (x^{2011}+x)dx = \left(\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2012}+\frac{1}{2} = \frac{1007}{2012}$; c) $g(x) = x^2 + x$; $V = \pi\int_1^2 g^2(x)dx =$

$= \pi\int_1^2 (x^4+2x^3+x^2)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{481\pi}{30}$.

## Testul 22

**I. 1.** $2^{-1}+2^{-2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. **2.** $\frac{2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x-3<0; x\in(-\infty, 3)$. **3.** Condiție: $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$; $x+2 =$

$= x^2+4x+4$; $x_1 = -2$ și $x_2 = -1$. **4.** Dobânda obținută este $D = 1008$ lei $- 900$ lei $= 108$ lei; $\frac{p}{100}\cdot 900 = 108; p = 12$.

**5.** $x_A = \frac{x_O+x_B}{2}$ și $y_A = \frac{y_O+y_B}{2}$; $x_B = 4$ și $y_B = 6$. **6.** $\sin x + 4\cos x = 5\cos x$; $\sin x = \cos x; x = 45°$. **II. 1.** a) $\det(H(x)) =$

$= 1+0+0-0-0-0 = 1$; b) $H(x)\cdot H(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln a+\ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\ln a = 0 \Rightarrow a = 1$; c) $H(1)+H(2)+\ldots+$

$+H(2012) = \begin{pmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(2012!) \\ 0 & 0 & 2012 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2012 & 0 & 0 \\ 0 & 2012 & \ln(2012!) \\ 0 & 0 & 2012 \end{vmatrix} = 2012^3$. **2.** a) $f(1) = 1^3+3\cdot 1^2-3\cdot 1-1 = 0$;

$f(1) = 0 \Rightarrow X-1 \mid f$; b) $x_1+x_2+x_3 = -3$; $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = -3$; $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 15$; c) $f = X^3+3X^2-3X-1 =$

$= (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3) \Rightarrow f(2) = (2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$.

**III. 1.** a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$, $x>0$; $f$ derivabilă în $x=4 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4)$; b) $f$ este derivabilă pe $(0,+\infty)$

și $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$; $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(4,+\infty) \Rightarrow$ funcția $f$ este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right) = +\infty$; $x=0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției $f$. **2.** a) $F$ este derivabilă și

$F'(x) = xe^x+e^x-e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$; $F' = f$, b) $\int_1^e f(\ln x)\,dx = \int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$

$= \frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$; c) $V = \pi\int_1^2 g^2(x)\,dx = \pi\int_1^2 e^{2x}dx = \pi\frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2 = \frac{\pi e^2(e^2-1)}{2}$.

## Testul 23

**I. 1.** $\sqrt{12}>3$; $2\sqrt{2}<3$; $2\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$. **2.** $x$ și $y$ sunt soluțiile ecuației $t^2-5t+6=0$; $t_1=2$, $t_2=3$; $S = \{(2,3),$ $(3,2)\}$. **3.** $g(1)=1$; $f(g(1)) = f(1) = 1$. **4.** $C_n^2 = 10$; $n=5$. **5.** Fie $M$ mijlocul segmentului $(AB) \Rightarrow M(4,3)$; $OM = 5$.





**6.** $\frac{MN}{\sin P} = \frac{MP}{\sin N}$; $MN = 8$. **II. 1.** a) Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei este egală cu $m+$

$+(-m)+2$, deci cu 2; b) $\det A = -2m^2-2m+12$, unde $A$ este matricea sistemului; $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$; c) Pentru

$m=1 \Rightarrow x_1=4, y_1=2, z_1=1$. **2.** a) Pentru $m=0 \Rightarrow f = X^3+1$. Restul este egal cu $f(1)=2$; b) $f(-1) = -1+m-$

$-m+1=0$; $X+1 \mid f$; c) $f = (X+1)(X^2+(m-1)X+1)$; $f$ are trei rădăcini reale $\Leftrightarrow X^2+(m-1)X+1$ are două

rădăcini reale $\Leftrightarrow m^2-2m-3\geq 0$; $m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{2x^2-1}{x^2+2}\right)' = \frac{4x(x^2+2)-2x(2x^2-1)}{(x^2+2)^2} =$

$= \frac{10x}{(x^2+2)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+2} = 2$. Ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției $f$ spre $+\infty$ este $y=2$;

c) $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[0,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe intervalul $[0,1]$; $0\leq x\leq 1 \Rightarrow f(0)\leq f(x)\leq f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq f(x)\leq\frac{1}{3}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$. **2.** a) $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = (x-\ln(x+1))\Big|_0^1 = 1-\ln 2$;

b) $I_n+I_{n+1} = \int_0^1\left(\frac{x^n}{x+1}+\frac{x^{n+1}}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}dx = \frac{1}{n+1}$; c) $\frac{x^{2012}}{2}\leq\frac{x^{2012}}{x+1}\leq\frac{x^{2012}}{1}$ pentru orice $x\in[0,1]$; $\int_0^1\frac{x^{2012}}{2}dx =$

$= \int_0^1\frac{x^{2012}}{x+1}dx \leq \int_0^1 x^{2012}dx$; $\frac{1}{4026}\leq I_{2012}\leq\frac{1}{2013}$.

## Testul 24

**I. 1.** $\log_3 6 = \log_3 3+\log_3 2$; $1+\log_3 2 = 1+a$. **2.** $A(0,1)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=1$; $f(0) = m-3$; $m=4$. **3.** $\log_2\frac{x+1}{x+3} =$

$= -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} = 2^{-1}$; $x=1$; se verifică apoi condițiile de existență. **4.** $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$. Numerele divizi-

bile cu 7 sunt 7, 14, 21, 28 $\Rightarrow$ 4 cazuri favorabile. Mulțimea are 30 de elemente $\Rightarrow$ 30 de cazuri posibile;

$p = \frac{2}{15}$. **5.** $O$ este mijlocul segmentului $(AB) \Leftrightarrow x_B = 2x_O-x_A \Leftrightarrow x_B = -4$; $y_B = 2y_O-y_A \Leftrightarrow y_B = 1$. **6.** $BC^2 = AB^2+$

$+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$; $\cos A = \frac{1}{5}$. **II. 1.** a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 4 & a^2 & 9 \end{vmatrix} = -a^2+5a-6$; b) $A$ este inversabilă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \det A\neq 0$; $-a+5a-6=0 \Rightarrow a_1=2$, $a_2=3$; $a\in\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$; c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+3z=1 \\ 4x+y+9z=1 \end{cases}$; $x=0, y=1, z=0$. **2.** a) $f(\hat{1}) =$

$= m+n$; $m+n=m \Leftrightarrow n=\hat{0}$; b) $f = X^5+\hat{4}X$; $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = f(\hat{2}) = f(\hat{3}) = f(\hat{4}) = \hat{0}$. Rădăcinile polinomului $f$

sunt $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$ și $\hat{4}$; c) $f(\hat{1}) = m+n$, $f(\hat{2}) = \hat{2}(m+n)$; $f(\hat{1}) = f(\hat{2}) \Rightarrow m+n=\hat{0}$; $f(\hat{3}) = \hat{3}(m+n) = \hat{0}, f(\hat{4}) =$

$= \hat{4}(m+n) = \hat{0} \Rightarrow f(\hat{3}) = f(\hat{4})$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)\cdot\ln x}{x^2-x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$; c) $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-1}{x^2+x} = 1$; $n = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x-1}{x+1} = -2$; $y = x-2$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$. **2.** a) $g(x) = e^x$; $\int g(x)dx = e^x + C$; b) $\int_1^2 \sqrt{x+1}\cdot f(x)dx = \int_1^2 (x+1)\cdot e^x dx =$ $= (x+1)\cdot e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e$; c) $h(x) = \sqrt{x+1}$; $\mathcal{A} = \int_2^3 |f(x)|\,dx = \int_2^3 \sqrt{x+1}\,dx = \dfrac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\Big|_2^3 = \dfrac{2}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$.

## Testul 25

**I. 1.** $a = \log_2 4 = 2 < 3 = \sqrt[3]{27} = b$. **2.** $x \in \left[\dfrac{2}{3}, 3\right]$. **3.** $x_1 = 1$ și $x_2 = 3$. **4.** Rezolvând în $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, $n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 15$, obținem $n = 5$. **5.** Avem $2m - 1 - m^2 + 1 = 0$, de unde $m \in \{0, 2\}$. **6.** Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, găsim $\cos x = \dfrac{5}{13}$. **II. 1.** a) Din $n^2 = 4$, $m^2 = 9$, găsim $n = 2$, $m = 3$; b) $U \cdot V = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & ay+bx \\ ay+bx & ax+by \end{pmatrix} \in G$; c) $U^2 =$ $= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Suma elementelor lui $U$ va fi $S = 2(a+b)$. Cum suma elementelor lui $U^2$ este $2(a+b)^2 = 8$, găsim $a + b = 2$, de unde suma căutată va fi **4. 2.** a) $f\left(\sqrt{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2} - 8 + 2\sqrt{2} + 4 = 0$; b) $f$ este divizibil și cu $x + \sqrt{2}$, deci este divizibil cu $x^2 - 2$. Obținem $f(x) = (x^2-2)(x+1)(x-2)$ cu soluțiile $x \in \{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}, 2\}$; c) Notând $2^x = t$ și folosind b) obținem $t \in \{\sqrt{2}, 2\}$, de unde $x \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1\right\}$. **III. 1.** a) Avem $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = f(1) = 2$; b) $x \in \{1, 3\}$; c) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, $(\forall)\, x \in (1, \infty)$. Cum $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (1, \infty)$, $f$ convexă; c) Dacă $x > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} < 1 \Rightarrow f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x+1}{x} + \dfrac{1}{x} + 1 = 2 + \dfrac{2}{x} \leq 4$. Cazul $x \in (0, 1]$ este analog. **2.** a) $\int_1^2 e^x dx = e^2 - e$; b) $\int_e^{e^2} \dfrac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^2 t\,dt = \dfrac{3}{2}$; c) $\int_1^a f(x)dx = e^x \ln x\Big|_1^e - \int_1^a \dfrac{e^x}{x}\,dx = e^e - \int_1^a g(x)dx$.

## Testul 26

**I. 1.** Din $x + 1 = \dfrac{x-1+3x-1}{2}$, găsim $X = 2$. **2.** Cum $f(5) = 0$, imediat $f(0)\cdot f(1)\cdot \ldots \cdot f(5)\cdot \ldots \cdot f(10) = 0$. **3.** Din condițiile de existență, $x \in [3, \infty)$ de unde $x = 5$. **4.** $A_7^2 = 42$. **5.** Punctul $B$ de intersecție a dreptelor $d_1$ și $d_2$, $\{B\} = d_1 \cap d_2$, are coordonatele $B(6, 6)$, de unde $AB = \sqrt{3^2+4^2} = 5$. **6.** $\cos \sphericalangle M = \dfrac{1}{8}$. **II. 1.** a) $A^2 - 3A = 3A - 3A = O_2$; b) $X(a)\cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 - (a+b)A + abA^2 = I_2 + (a+b)A + 3abA = I_2 + (a+b+3ab)A =$ $= X(a+b+3ab)$ (am ținut cont de a); c) $\det X(a) = 3a + 1 \neq 0$, $(\forall)\, a \in \mathbb{Z}$, de unde $X(a)$ inversabilă. **2.** a) $x_1^2 +$





$+ x_2^2 + x_3^2 = 14$; b) Relația revine la $-2 = \dfrac{-5}{-m}$, de unde $m = \dfrac{5}{2}$; c) $\Delta = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 -$ $- x_3^2) = (-2)(-5 - 14) = 38 \in \mathbb{N}$. **III. 1.** a) $e^2 + \dfrac{1}{4}$; b) $f'(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2} > 0$ $(\forall)\, x \in [1, \infty)$, de unde $f$ strict crescătoare pe $[1, \infty)$. Cum $f(x) \geq f(1) = 0$, avem $f(x) > 0$, $(\forall)\, x \in [1, \infty)$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, de unde concluzia. **2.** a) $\mathcal{V} = \pi \int_0^3 f^2(x)dx = \pi \int_0^3 (x^2+10)\,dx = 39\pi$; b) Avem $\int f(x)dx = \int \sqrt{x^2+10}\,dx = F(x)$. Cum $F$ este primitivă a lui $f$, avem $F'(x) = f(x)$, de unde $F'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, de unde $F$ este strict crescătoare.

## Testul 27

**I. 1.** $\log_7(3+\sqrt{2}) + \log_7(3-\sqrt{2}) = 1$. **2.** Rezolvând sistemul $f(2) = 3$, $f(-1) = 0$, obținem $a = 0$, $b = -1$. **3.** $x = 2$. **4.** $p = \dfrac{11}{45}$. **5.** Coordonatele lui $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$, cu $P(1, 2)$. **6.** $l = 4$. **II. 1.** a) Avem $A_0(1, 1)$, $A_1(2, 3)$, de unde ecuația căutată va fi $2x - y - 1 = 0$; b) $A_2(4, 9)$, $A_3(8, 27)$. Avem $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, ceea ce arată că $A_1$, $A_2$, $A_3$ nu sunt coliniare; c) Avem $A = 6^n$, de unde $n = 3$. **2.** a) $x \circ 3 = \dfrac{1}{2}(3x - x - 3 + 3) = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, și, cum legea „$\circ$" este comutativă, avem concluzia; b) Notând $2'$ simetricul lui 2 față de „$\circ$", găsim $2' = 5$; c) Fie $x = 2k + 1$, $y = 2l + 1$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Evident, $x, y \in H$, dar $x \circ y = 2kl + 1 \in H$, $k, l \in \mathbb{Z}$, ceea ce arată $H$ parte stabilă. **III. 1.** a) $f'(x) =$ $= \dfrac{1}{x} + e^x$. Avem $x \cdot f'(x) = 1 + xe^x$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$; b) $y = (e-1)x - 1$; c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x + e^x}{x} = +\infty$. **2.** a) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = 3$; b) Fie $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$. Obținem $F''(x) = f'(x) = 6x + 2$. Cum $F''(x) \leq 0$, $(\forall)\, x \in$ $\in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right)$, $F(x)$ concavă; c) $\int_0^a f(x)dx = a(a^2 + a + 1)$. De aici, $a^3 + a^2 + a \geq 3a^2 + 2$ revine la $a^3 - 2a^2 + a - 2 \geq 0$ sau $(a-2)(a^2+1) \geq 0$, inegalitate evidentă pentru $a \geq 2$.

## Testul 28

**I. 1.** $a_1 = 7$, $r = -1$, $a_6 = 1$. **2.** $x \in \{-1, 0, 1\}$. **3.** Din existența logaritmului găsim $x \in (4, \infty)$ cu soluția $x = 7$. **4.** 240 lei. **5.** Notăm cu $M$ mijlocul segmentului $AB$. Avem $M(3, 2)$. Panta dreptei $AB$ fiind $m = -1$, atunci a mediatoarei va fi $m' = 1$. Imediat ecuația căutată va fi $x - y - 1 = 0$; c) Notăm cu $O$ centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$, găsim $m(\sphericalangle BOC) = 120°$. În $\Delta\, BOC$ isoscel, $OB = R$, ținând cont că $m(\sphericalangle OBC) = 30°$, găsim $R = 3\sqrt{3}$. **II. 1.** a) $D(-1, 1) = -2$; b) $D(x, 2010) = 1$ conduce la $x = 2011$; c) $D(x, y) = x - y$. Atunci $D(x, y)\cdot D(x, -y) =$ $= (x+y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2 = D\left(x^2, y^2\right)$. **2.** a) $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2x(y-3) - 6(y-3) + 3 = 2(x-3)\cdot$ $\cdot (y-3) + 3$; b) $(x * y) * z = x * (y * z) = 4xyz - 12(xy + xz + yz) + 36(x + y + z) - 105 = 4(x-3)(y-3)(z-3) +$

+ 3; c) Din a) avem $x * 3 = 3 * x = 3$ de unde $1 * 2 * 3 * \ldots * 2011 = 3$. **III. 1.** a) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 + e^x \Rightarrow f'(0) = 2$; b) $f'(x) = 2x^2 + (x+1)^2 + e^x > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $f$ este strict crescătoare; c) Avem $f(a) \le f(b)$ și apoi concluzia. **2.** a) $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x}dx = \int_0^1 x dx = 1$; b) $\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1$; c) $\int_0^1 f_m(x^2)dx = \int_0^1 x^{2m}e^x dx$. Cum $e^x \ge 1$, $(\forall)\, x \in [0, 1]$, imediat $\int_0^1 x^{2m}e^x dx \ge \int_0^1 x^{2m}dx = \frac{1}{2m+1}$, de unde concluzia.

## Testul 29

**I. 1.** 0. **2.** $m = 3$. **3.** $x \in \{-2, 2\}$. **4.** $x = 4$. **5.** $x - y + 1 = 0$. **6.** $\cos x = -\frac{4}{5}$. **II. 1.** a) $O_2$; b) $\det(A) = 0 = \det(A + I_2)$; c) $O_2$. **2.** a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4$; b) 0; c) $\Delta = -1$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$; b) $y = 1$; c) Deoarece $f$ este crescătoare pe $[1, 2]$ și $f(1) = -\frac{3}{5}$, $f(2) = 0$, rezultă că $-\frac{3}{5} \le f(x) \le 0$, $(\forall)\, x \in [1, 2]$. **2.** a) 2010; b) $\frac{3\pi}{2}$; c) $\int_1^2 f^{2010}(x)\,dx \le \int_1^2 (1+x)^{2010}dx = \frac{3^{2011} - 2^{2011}}{2011}$.

## Testul 30

**I. 1.** 0. **2.** $V(1, 2)$. **3.** $x \in \{-1, 1\}$. **4.** $A_4^3 = 24$. **5.** $\overline{w}(3, -5)$. **6.** $h = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12}{5}$. **II. 1.** a) $I_2$; b) $A^{-1} = A - I_2$; c) $X = \begin{pmatrix} 2009 & 2010 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.** a) $\hat{2}$; b) $\hat{0}, \hat{2}$; c) $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2} = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, $(\forall)\, a \in \mathbb{Z}_3$. **III. 1.** a) $f'(x) = (2x + x^2)e^x$; b) Deoarece $f'(x) \le 0$, $(\forall)\, x \in [-2, 0]$, rezultă că $f$ este descrescătoare pe $[-2, 0]$; c) Dacă $x \in [-1, 0]$, atunci $f(0) \le f(x) \le f(-1)$ (pentru că $f$ este descrescătoare pe $[-1, 0]$) și $f(0) \le f(x^2) \le f(1)$ (căci $f$ este crescătoare pe $[0, 1]$ și $x^2 \in [0, 1]$). Adunând aceste două relații, obținem $0 \le f(x) + f(x^2) \le \frac{e^2+1}{e}$, $(\forall)\, x \in [-1, 0]$. **2.** a) 4; b) $\mathcal{V} = \pi\int_1^2 g^2(x)dx = \frac{29\pi}{6}$; c) $\frac{e^2+3}{4}$.

## Testul 31

**I. 1.** $a_1 = -1$, $r = 3$, $S_7 = 56$. **2.** $A(4, 7)$. **3.** $x \in \{-3, 3\}$. **4.** 3600. **5.** $m \in \{-1, 2\}$. **6.** $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **II. 1.** a) $\det(A) = m^2 - 2m + 1$; b) $x = 1$, $y = -1$, $y = 3$; c) Scăzând ultimele două ecuații, obținem $0 = 3$. **2.** a) $x * (y * z) = (x-4) \cdot (y-4)(z-4) + 4 = (x * y) * z$, $(\forall)\, x, y, z \in \mathbb{R}$; b) Dacă $x > 4$, $y > 4$, atunci $(x-4) \cdot (y-4) > 0$, deci $x * y = (x-4)(y-4) + 4 > 4$; c) 4. **III. 1.** a) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$; b) $y = \frac{7}{2}x - 2$; c) $x = 0$ este asimptota verticală a graficului





funcției $f$, la stânga și la dreapta. **2.** a) $g'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x > 0$; b) $8\ln 2 - 4$; c) $\frac{15}{16\ln 2}$.

## Testul 32

**I. 1.** $r = 2$, $S_{10} = 120$. **2.** $m \in \{1, 2\}$. **3.** $x = 11$. **4.** $C_5^2 = 10$. **5.** $\sqrt{5}$. **6.** $\mathcal{A}_{ABC} = 16$. **II. 1.** a) 1; c) $(f(A))^3 = (I_3 + B)^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, pentru $B^3 = O_3$. **2.** a) $x \in \{3, 5\}$; b) $a = 3$; c) $x = 4$, $y = 2$. **III. 1.** a) $f'(x) = 3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$; b) 0; c) $f$ este crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, \infty)$ și descrescătoare pe $[-1, 0)$ și pe $(0, 1]$. **2.** a) $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{7\pi}{15}$; b) $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_2^1 \sqrt{t}dt = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Testul 33

**I. 1.** 1. **2.** 0. **3.** $x = 9$. **4.** $n = 6$. **5.** $a \in \{1, 2\}$. **6.** 1. **II. 1.** a) $\det(A) = -5$; b) $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, $z = \frac{3}{5}$; c) $x = \frac{9}{5}a - 1$, $y = \frac{14}{5}a - 2$, $z = \frac{13}{5}a - 2$, $a = 5$. **2.** a) 4018; b) $x \in [-2, 1]$; c) $A$ are un element. **III. 1.** b) $y = 2$; c) Avem $f'(x) \le 0$, $(\forall)\, x \in (0, 1]$ și $f'(x) \ge 0$, $(\forall)\, x \in [1, \infty)$, deci $f(x) \ge (1)$, $(\forall)\, x > 0$, de unde rezultă că $2\sqrt{x} - \ln x \ge 2$, $(\forall)\, x > 0$. **2.** a) $\int f_2(x)dx = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + x + C$; b) $A = \int_0^1 (2x^2 - 2x + 1)e^x dx = 3e - 7$; c) $\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{2}{n+1} \ge \frac{2}{n+2} = \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$.

## Testul 34

**I. 1.** 9. **2.** $x = 7$. **3.** $-\frac{1}{2}$. **4.** $\operatorname{Im} f = [-1, 0]$. **5.** $a = -3$, $b = 4$. **6.** $m(\sphericalangle B) = 30°$. **II. 1.** a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) Verificare; c) $f(x) \cdot f(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & 2x^2 + 2x \\ 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y & 2y^2 + 2y \\ 0 & 1 & 4y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & 2(x+y)^2 + 2(x+y) \\ 0 & 1 & 4(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = f(x+y)$. **2.** a) $x \in \{\hat{1}, \hat{4}\}$; b) $\Delta = \hat{0}$; c) $(x, y) \in \{(\hat{1}, \hat{2}), (\hat{3}, \hat{4}), (\hat{5}, \hat{0})\}$. **III. 1.** a) $f'(x) = 6x^2 - 6x$ și $f'(1) = 0$; b) Deoarece $f''(x) = 12x - 6$, rezultă că $f$ este concavă pe $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ și convexă pe $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$; c) Funcția $f$ este descrescătoare pe $[0, 1]$ și crescătoare pe $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ și pe $[1, \infty)$. Cum $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f(1) = 0$, rezultă că $f(x) \ge 0$, $(\forall)\, x \ge -\frac{1}{2}$.

**2.** a) $\int f(x)\,dx = e^x + C$; b) $\mathcal{A} = \int_0^1 xe^x dx = 1$; c) Întrucât $g(x) - f(x) \geq 0$, $(\forall)\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, rezultă că $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x))\,dx \geq 0$.

## Testul 35

**I. 1.** 0. **2.** 3. **3.** 5. **4.** Im $f = [-5, 3]$. **5.** Fie $M$ mijlocul lui $AC$. Avem $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. **6.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **II. 1.** a) $a = 3$, $b = 3$, $c = 5$; b) $A \cdot F = F \cdot A = I_3$; c) $X = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. **2.** b) $x * (y * z) = 4xyz - 2xy - 2xz - 2yz + x + y + z = (x * y) * z$; c) $x \in \{0, 1\}$. **III. 1.** b) Funcția $f$ este crescătoare pe $[0, \infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty, 0]$; c) 0. **2.** a) $I_0 = \frac{e^4 - e^2}{2}$; b) Deoarece $x \ln^n x \leq x \ln^{n+1} x$, $(\forall)\ x \in [e, e^2]$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, rezultă că $I_n \leq I_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$; c) $I_n = \int_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^n x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln^n x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} (\ln^n x)'\,dx = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$.

# 2. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat 2015

## Testul 1

**I. 1.** Avem $a = \lg 60 - \lg 6 = \lg 10 = 1$. **2.** $\Delta = -4a^2 < 0$, $(\forall)\ a \in \mathbb{R}^*$. **3.** Din $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ rezultă $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(-1)f(0)f(1); f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. **4.** Avem $A = \{C_4^3, C_5^2, C_4^2\} = \{4, 6, 10\}$. Notăm $p$ = probabilitatea ca un element din $A$ să fie divizibil cu 3, obținem $p = \frac{1}{3}$. **5.** Notăm $M$ mijlocul lui $AB$, punctul $M$ va avea coordonatele $M(4, 6)$, de unde $d(C, M) = 4\sqrt{2}$. **6.** Cum $\cos 120° = -\cos 60°$, avem $(\cos 120° + \cos 60°)(\sin 135° - \sin 45°) = 0$. **II. 1.** a) Verificare; b) $\Delta = -5a$; c) Pentru $a \neq 0$, obținem $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ soluția sistemului. **2.** a) Din tabla operației rezultă că $H$ e parte stabilă; b) $x \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$. c) Deoarece $x^3 = \hat{0}$, pentru orice $x \in H \Rightarrow$ suma este $\hat{0}$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - 1$; b) Din a) $x = 0$ punct de minim pentru $f$. De aici, $f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$; c) Deoarece $x = 0$ este punct de minim, alegând $x = \frac{1}{2}$, găsim $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$, adică $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$. **2.** a) $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_1^4 = 2$; b) $\mathcal{V} = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \pi \int_0^1 t^2\,dt = \frac{\pi}{3}$; c) Deoarece $\ln x \leq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, rezultă $f(x) \leq 0$ și de aici concluzia.





## Testul 2

**I. 1.** 11. **2.** $x \in \{-5, 5\}$. **3.** Se obține rația $r = 4$, $a_{2012} = 2050$. **4.** $x = 10$. **5.** $m = 5$. **6.** Avem $\sin 70° = \cos 20°$, de unde $\sin^2 20° + \cos^2 20° = 1$. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$, de unde $A^2 - 6A - I_2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$; b) $\det A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = A^{2010}(A^2 - 6A - I) - A^2(A^2 - 6A - I) = A^{2010} \cdot O_2 - A^2 \cdot O_2 = O_2$, folosind a). **2.** a) $f(1) = 0$ conduce la $a = 1$; b) Folosind relațiile lui Viète, găsim că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1) + (x_3 - 1)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$; c) Din b), dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 = (x_3 - 1)^2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, ceea ce conduce la $a = 1$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' - \left(\ln(x+1)\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2}$; b) $f'(x) \leq 0$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, de unde $f$ descrescătoare; c) Din b) $\Rightarrow f(x) \leq f(0)$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, adică $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$. **2.** a) $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2}\right)dx = \int dx = x + C$; b) $\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2} + \ln 2$; c) Din $x^2 + 1 \geq 2x$ avem $x^2 + x + 1 \geq 3x$, de unde $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq \frac{3}{x}$, $(\forall)\ x \in [1, e]$. Imediat $\int_1^e f(x)dx \geq 3\int_1^e \frac{1}{x}dx = 3\ln x\Big|_1^e = 3$.

## Testul 3

**I. 1.** $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{2}{3}$. **2.** $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$, $m \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. **3.** $x \in \{-3, 3\}$. **4.** $A_5^4 = 120$. **5.** 4. **6.** $2\sqrt{7}$. **II. 1.** a) $\Delta = ab + bc + ac - a^2 - b^2 - c^2$, de unde $-2\Delta = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2$; b) Dacă $A$, $B$, $C$ coliniare, $\Delta = 0$, adică $a = b = c$, ceea ce contrazice ipoteza $a$, $b$, $c$ impare distincte; c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|$, iar $\Delta$ număr par, căci diferența a două numere impare este număr par. **2.** a) $a = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x - 2)$; b) $f(1) + f(2) = -1 + 1 = 0$; c) $f(x) = (x - 1)(x - 2)c(x) + ax + b$, de unde $f(1) = a + b$ și $f(2) = 2a + b$. Cum $f(1) = -1$ și $f(2) = 1$, găsim $a = 2$ și $b = -3 \Rightarrow r = 2x - 3$. **III. 1.** a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, de unde $y = 1$, asimptota la $+\infty$; b) $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, $f$ strict crescătoare; c) Fie $g(x) = f(x) - 1$, $g : (-2, \infty) \to \mathbb{R}$. Obținem că $g(x) = -\frac{1}{x+2}$. În plus, $g(x) < 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, de unde $f(x) - 1 < 0$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$, adică $f(x) < 1$, $(\forall)\ x \in (-2, \infty)$. **2.** a) $g'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x} = f(x)$; b) $\mathcal{A} = \int_0^3 |f(x)|dx = g(x)\Big|_0^3 = \frac{27}{e^3}$; c) $e^{-x} \leq 1$, $(\forall)\ x \in [0, \infty)$, conduce la $x^3e^{-x} \leq x^3$, de unde $\int_0^1 x^3e^{-x}dx \leq \int_0^1 x^3dx$, adică $\int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{4}$, căci $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$.

## Testul 4

**I. 1.** $\log_2 8 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{125} = 3 + 2 - 5 = 0$. **2.** $f\left(\frac{2013}{2012}\right) = 2012 \cdot \frac{2013}{2012} - 2011 = 2$. **3.** $C_5^3 = 10$. **4.** Notând $2^x = t$ și rezolvând $t^2 - 10t + 16 = 0$, găsim $x \in \{1, 3\}$. **5.** $MBNP$ este paralelogram, de unde $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP}$.

**6.** $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$, de unde $BC = \sqrt{6}$. **II. 1.** a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, adică $AB = C$; b) $\det(AB) = \det C = 0$; c) Matricele din enunț. Într-adevăr, $BA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, de unde $\det(BA) = 3 \neq 0$, iar din a) $\det(AB) = 0$.

**2.** a) $e = -3$; b) $a = b = 1$; c) Avem $2ab = 4 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow (a; b) \in \{(1; 2); (2; 1)\}$. **III. 1.** a) $f'(x) = 4x^3 - 4$; $f'(x) = 0$ implică $x = 1$ punct critic, din care imediat $x = 1$, punct de minim; b) $f'(x_0) = 104$, de unde $x_0 = 3$; c) Cum $x_0 = 1$ punct de minim, $f\left(\sqrt{2}\right) \geq f(1)$, $f\left(\sqrt{3}\right) \geq f(1)$ de unde $f\left(\sqrt{2}\right) + f\left(\sqrt{3}\right) \geq 2f(1) = 2$. **2.** a) $\int (x^2+1)f(x)dx = 2\int x\,dx = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $\int_0^1 f(x)dx = \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \ln 2$; c) Cum $f(x) \leq 2x$, deci $\int_0^1 f^2(x)dx \leq \int_0^1 4x^2 dx$ c $= \frac{4}{3}$.

## Testul 5

**I. 1.** $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 2$. **2.** $A(1, 2)$, unde $A$ este punctul de intersecție a celor două drepte. **3.** $\Delta = 0$; $m \in \{-3, 5\}$. **4.** $n(n+1) = 56$, de unde $n = 7$. **5.** Catetele au lungimile de 2, respectiv 8. **6.** Dreptele $AB$ și $CD$ au același coeficient unghiular $m = +1$. **II. 1.** a) Avem $3n + 1 + 1 - 3n - 2 = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$; b) Fie $A_0(1, 1)$; $A_1(4, -3)$; $B_2(3, 5)$, de unde $\mathscr{A} = 10$; c) $3k + 1 = 2l - 1$, $1 - 3k = 4l - 3$, conduce la $k = 0$, $l = 1$. **2.** a) $f = x^3 - 2x^2 + x - 2x + 2 = x(x-1)^2 - 2(x-1) = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)(x^2 + x - 2x - 2) = (x-1)[x(x+1) - 2(x+1)] = (x-1)(x+1)(x-2)$; b) $g(1) = a - 2$, $g(-1) = a - 2$, $g(2) = a - 2$; c) Din a) și b) avem $a = 2$. **III. 1.** a) $f'(x) = \frac{8x}{\left(x^2+4\right)^2}$; b) $f'(x) = 0$. Găsim punctul de minim $O(0, 0)$; c) Cum $\frac{x^2}{x^2+4} \geq 0$ și $\frac{x^2}{x^2+4} - 1 = \frac{-4}{x^2+4} < 0$, deducem că $0 \leq f(x) < 1$. **2.** a) $\mathscr{V} = \pi\int_0^1 f^2(x)dx = \pi\int_0^1 (x^2+9)\,dx = \frac{13}{3}\pi$; b) $\int 2x\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{2}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4} + C$, $C \in \mathbb{R}$; c) Din $\sqrt{x^2+4} \geq 2$, avem că $\int_0^1 \sqrt{x^2+4}dx \geq 2\int_0^1 dx = 2$, adică $\int_0^1 f(x)dx \geq 2$.

## Testul 6

**I. 1.** Avem $2x + 5 = \frac{x+7+3x+3}{2}$. **2.** $\log_3 27 + \log_5 25 = 3 + 2 < 6$. **3.** $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$. **4.** $2011^2$. **5.** $(a-3)^2 + 36 = 100$, $a \in \{-5, 11\}$. **6.** 45. **II. 1.** a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $I_3 + A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $\det(I_3 + A) = 1 \neq 0$, $I_3 + A$ inversabilă; $(I_3 + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) Fie $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se verifică $AB = BA = O_3$. **2.** a) Din $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0$, găsim $\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4\alpha^2 - \alpha = 0$ (se observă că $\alpha \neq 0$, $\alpha$ rădăcină). De aici $\alpha^4 + 2\left(\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 1\right) - 9\alpha + 2 = 0$, de unde $\alpha^4 = 9\alpha - 2$; b) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 9(x_1 + x_2 + x_3) - 6 = -18$; c) Dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \geq 0$, contradicție cu b). **III. 1.** a) $y = x + 2$; b) $f'(x) = \frac{x^2+6x+8}{(x+3)^2}$; c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-4, -2\}$ etc. Punctul de minim $x = -2$, de unde $f(-2) = 1$. **2.** a) $\frac{56}{3}$; b) $\frac{e^2-1}{4}$; c) $\ln(x+2) \leq x$ conduce la $(x+1)\ln(x+1) \leq x^2 + x$, $(\forall)\, x \geq 0$. $\int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 f(x^2+x)dx = \frac{5}{6}$.





## Testul 7

**I. 1.** Cum $S_3 = 3(a_1 + 5)$, avem $a_1 = 37$. **2.** Deoarece $x_v = -\frac{b}{2a}$, obținem $\frac{m+1}{6} = -1$, de unde $m = -7$. **3.** Condițiile de existență conduc la $x \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$, iar rezolvând obținem $x = -1$. În concluzie: ecuația nu are soluție în $\mathbb{R}$.

**4.** $p = \frac{1}{5}$. **5.** $5\vec{u} - 3\vec{v} = -2\vec{i}$. **6.** Avem $|a-2| = 4$, de unde $a \in \{-2, 6\}$. **II. 1.** a) $y = x + 1$; b) Obținem că $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$; c) Avem $\mathscr{A} = \left|\frac{1}{2}\right| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ n-3 & n+2 & 1 \end{vmatrix} = 4$. **2.** a) Cum legea „$*$" este comutativă, obținem $a * C_4^2 = 6 = C_4^2$; b) Obținem $(x * y) * z = x * (y * z) = xyz - 6(xy + xz + yz) + 36(x + y + z) - 210$; c) Din punctul a) avem $x * 6 = 6 * x = 6$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde $1 * 2 * 3 * \ldots * 2012 = 6$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - 1 - \frac{2x}{2} = g(x)$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$; b) Avem $f''(x) = e^x - 1$, $f''(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$, de unde $f'(x) > 0$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$; c) $f$ este strict crescătoare folosind b). **2.** a) $\int\left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = -\int f\frac{1}{x+1}dx = -\ln|x+1| + C = -\ln(x+1) + C$, $(\forall)\, x \in (0, \infty)$; b) $\int_1^2 f(x)dx = \ln\frac{x}{x+1}\Big|_1^2 = \ln\frac{4}{3}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x (t+1)f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

## Testul 8

**I. 1.** $A = \log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{8}{7}\right) = \log_2 8 = 3$. **2.** $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. **3.** Din $f(x) = 0$ obținem $x = \frac{7}{2}$. **4.** $C_4^2 + A_4^2 = 6 + 12 = 18$. **5.** Din $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{O}$ și $\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{MN} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} = \vec{O}$, găsim $2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{CB} = \vec{O}$. **6.** $E = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x = 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$. **II. 1.** a) $f(0) = \det A = 6$; b) Cum $f(x) = x^2 - 5x + 6$, rezolvând $f(x) = 0$, găsim $x \in \{2, 3\}$; c) $B$ = inversabilă dacă $\det B \neq 0$. Cum $\det B = f\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$ din b) $\Rightarrow \det B \neq 0$. **2.** a) $(x * y) = 2x(y-1) - 2(y-1) + 1 = 2(x-1)(y-1) + 1$; b) $x * (y * z) = (x * y) * z = 4(x-1)(y-1)(z-1) + 1$; c) $x * x * x = 4(x-1)^3 + 1$, de unde $4(x-1)^3 + 1 = 5$ cu soluția $x = 2$. **III. 1.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = f(-2) = -2$; b) Ecuația asimptotei este $y = \frac{1}{2}(x-2)$; c) Cum $f$ este strict crescătoare pe $(-\infty, -2)$ și pe $[-2, \infty)$, iar din a) $f$ continuă, $f$ strict crescătoare. **2.** a) $\int_1^3 f_2(x)dx = \int_1^3 \frac{x^2+1}{x^2+1}dx = 2$; b) $f_{2012}(x) - f_{2011}(x) = \frac{x^{2011}(x-1)}{x^2+1} \geq 0$, $(\forall)\, x \in [1, \infty)$ și apoi concluzia; c) $\mathcal{A} = \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \ln\frac{5}{2}$.

## Testul 9*

**1. 1.** $C_5^0 + C_5^2 + C_5^4 = 1 + 10 + 5 = 2^4$. **2.** $x = 2$. **3.** Din $f(x) = g(x)$ rezultă $x \in \{1, 2\}$. **4.** 160 lei. **5.** Punctul $Q$ îl obținem ca intersecția paralelei la $MN$ dusă prin $P$, $y - 11 = x - 7$, respectiv a paralelei duse prin $M$ la $PN$, $y - 1 = 3(x-1)$, de unde $Q(3, 7)$. **6.** $\sin(90° - x)\cos x + \cos(90° - x) \cdot \sin x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $(\forall)\, x \in (0, 90°)$.

**II. 1.** a) $B_1(1, 0)$, de unde aria este 1; b) $2x - 3y - 2 = 0$; c) Avem $B_0(0, -1)$. Cum $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{2n}{n^2+1} & \frac{n^2-1}{n^2+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{-2n}{n^2+1} \neq 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0, 1\}$, punctele $B_0, B_1, B_n$ necoliniare. **2.** a) $2010 = 3 \cdot 670 \in A$, $7 = 3 \cdot 2 + 1 \in B$, $14 = 3 \cdot 4 + 2 \in C$; b) $x + y = 3e + 1 + 3p + 2$, $e, p \in \mathbb{Z}$. Avem $x + y = 3(e + p + 1)$, $e + p + 1 \in \mathbb{Z}$, de unde $x + y \in A$; c) Se verifică imediat axiomele grupului comutativ. **III. 1.** $a = f'(x) = 0$, de unde $x \in \{0, 2\}$ abscisele punctelor de extrem. Obținem $A(0, 3)$ – punct de maxim, $B(2, -1)$ – punct de minim; b) $f''(x) = 1$, de unde $x = 1$ este abscisa punctului de inflexiune ce are coordonatele $I(1, 1)$. Din a), $-1 \leq f(\sqrt{2}) \leq 3$, $-1 \leq f(\sqrt{3}) \leq 3$, de unde concluzia. **2.** a) $f$ continuă pe $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = f(1) = 0$; b) $\int_1^e f(x)dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x - 1)dx + \int_1^e x\ln x\,dx = -1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$; c) $\mathcal{V} = \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 (3x^2 - 2x - 1)^2 dx = \frac{17}{15}\pi$.





## Testul 10

**I. 1.** Cum $\sqrt[3]{27} = 3$, $\log_2 512 = 9$, obținem $3^2 = 1 \cdot 9$, de unde concluzia. **2.** Cum $f(8) = 0$, imediat $f(0) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(8) \cdot f(9) \cdot f(10) = 0$. **3.** $x \in \{-4, 3\}$. **4.** $\frac{48}{60} = \frac{4}{5}$. **5.** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}}{2} = \vec{0}$. **6.** $\cos A \cos B = \frac{AC}{AB}\cdot\frac{BC}{AB} = \frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{AB} = \sin A \cdot \sin B$. **II. 1.** a) Din $x + y + z = 1$ și $x + y + 2z = 1$, avem $z = 0$; b) Folosind a) și condiția $x = 2y$, obținem soluția $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$; c) Dacă $a \neq 1$, soluția va fi $(1, 0, 0)$. **2.** a) $X(a) \cdot X(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix} = X(a + b)$; b) Se verifică axiomele grupului, ținându-se cont de a); c) Se obține că $X(-3) \cdot X(-2) \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) = X(0) = X(C)$, de unde $c = 0$. **III. 1.** a) $f'(x) = 3x^2 - 12$, de unde ecuația tangentei va fi $y = 36(x - 4)$; b) $f'(x) = 0$, găsim abscisele punctelor de extrem: $x \in \{-2, 2\}$. Punctele vor fi $A(-2, 0)$ punct de maxim, $B(2, -32)$ punct de minim; c) $f(x) = (x + 2)^2(x - 4)$, de unde $f(x) \leq 0$, $(\forall)\, x \in (-\infty, +4)$. **2.** a) $\int_0^1 xe^x dx = 1$; b) $\int_0^1 xe^{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_1^a dt = \frac{e-1}{2}$; c) $I_{100} - I_{99} = \int_0^1 (xe^{x^{100}} - xe^{x^{99}})dx = \int_0^1 xe^{x^{99}}(x-1)dx < 0$, $(\forall)\, x \in (0, 1)$, de unde concluzia.

## Testul 11

**I. 1.** Din $x + 3 = \frac{8+2}{2}$, obținem $x = 2$. **2.** $f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 3^{2012} + 9 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 3^{2012} - 9 - 1 = 0$. **3.** $C_6^5 = 6$ reprezintă numărul submulțimilor cu 5 elemente. În total, vom avea 7 submulțimi cu cel puțin 5 elemente. **4.** Avem $\frac{1}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|} = \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$, $\log_2\frac{1}{8} = -3$. Obținem $\log_2\frac{1}{8} < 0$, $(13) < \frac{1}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}$. **5.** Avem $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8}$, de unde concluzia. **6.** Cum $\cos 170° = -\cos 10°$, $\cos 150° = -\cos 30°$, $\cos 130° = -\cos 50°$, $\cos 110° = -\cos 70°$, $\cos 90° = 0$, avem concluzia. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, de unde $A^2 - I_2 = O_2$; b) Din $A^2 = I_2 \Rightarrow A$ este inversabilă și $A^{-1} = A$; c) Din $A^2 - I_2 = O_2 \Rightarrow (A - I_2)(A + I_2) = O_2$, deci putem alege $X = A - I_2$, $Y = A + I_2$. **2.** a) $\hat{0}$; b) $(x \oplus y) \oplus z = x + y + z$; c) $e = \hat{3}$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{x^3+2x^2+2}{x^2+1}\right)' = \frac{(3x^2+4x)(x^2+1) - 2x(x^3+2x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$; b) $f'(x) = 0$ conduce la abscisa punctului critic $x = 0$. Cum derivata este crescătoare, $f$ nu admite puncte extremale; c) Avem $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x} = 1$, $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 2$, de unde ecuația asimptotei $y = x + 2$. **2.** a) $F(x) = \int f(x)dx = e^x - e^{2-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $y(x) = e^x$. Volumul corpului va

fi $\mathcal{V}=\pi\int_0^3 g^2(x)dx=\pi\int_0^2 e^{2x}dx=\frac{e^4-1}{2}$; c) În inegalitatea $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $a,b>0$, luăm $a=e^x$, $b=e^{2-x}$. Imediat $e^x+e^{2-x}\geq 2e$, de unde $\int_0^2 f(x)dx\geq\int_0^2 2e=4e$.

## Testul 12*

**I. 1.** $3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4\Rightarrow x=4$. **2.** $\Delta=m^2+4m+8=(m+2)^2+4>0$, $(\forall)\ m\in\mathbb{R}$. **3.** $x\in[0,\infty)$. **4.** $C_4^0+C_4^2+C_4^4=1+6+1=2^3$. **5.** $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}}{2}+\frac{\overrightarrow{AB}}{2}=\vec{O}$. **6.** $\cos A=\frac{11}{16}$. **II. 1.** a) Coordonatele lui $M$ sunt $M(6,5)$. Ecuația căutată va fi: $y=\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$; b) Aria triunghiului $AMB$, $\mathcal{A}_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\6&5&1\\9&3&1\end{vmatrix}\cdot\frac{1}{2}=11$, iar aria triunghiului $AMC$, $\mathcal{A}_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\6&5&1\\3&7&1\end{vmatrix}=11$. Avem $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2$; c) Fie $P(x_0,y_0)$ un punct arbitrar, $P\in(AM)$. Atunci $y_0=\frac{4}{5}x_0+\frac{1}{5}$. Fie $\mathcal{A}_1$ = aria triunghiului $ABP$, $\mathcal{A}_2$ = aria triunghiului $ACP$, avem $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\frac{11|x-1|}{5}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$. **2.** a) $16\circ 81=36$; b) $1\circ(16\circ 81)=1\circ 36=6$, $(1\circ 16)\circ 81=4\circ 81=18$, de unde inegalitatea cerută; c) Contraexemplul este cel pentru $x=1$, $y=16$, $z=81$, de unde folosim b). **III. 1.** a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}f(x)=f(1)$ conduce la $a=1$; b) $f'_s(1)=f'_d(1)=2$; c) $f(x+1)+f(x-1)\geq 2f(x)$ este schimbată cu $(x+1)^2+(x-1)^2\geq 2x^2$, inegalitate evidentă. **2.** a) Avem $F'(x)=\frac{2}{3}\sqrt{2x+1}+\frac{2x+1}{3\sqrt{2x+1}}+\sqrt{2x+1}=f(x)$; b) Avem $\mathcal{A}=\int_4^{12}f(x)dx=\frac{2x+1}{3}\sqrt{2x+1}\Big|_4^{12}=\frac{98}{3}$; c) $\mathcal{V}=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\frac{(2x+1)^3}{9}dx=\frac{68\pi}{9}$.

## Testul 13*

**I. 1.** $I\cap J\cap\mathbb{Z}=\{5,6\}$. **2.** $f(a)-f(b)=\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **3.** $x\in\{0,\log_2 3\}$. **4.** $p=\frac{1}{15}$. **5.** $x=\frac{12}{7}$, $y=\frac{4}{7}$. **6.** $m_A=3$.

**II. 1.** a) $A=\begin{vmatrix}a&b&-2\\-2&a&b\\b&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+b-2&b&-2\\a+b-2&a&b\\a+b-2&-2&a\end{vmatrix}=(a+b-2)\begin{vmatrix}1&b&-2\\1&a&b\\1&-2&a\end{vmatrix}=(a+b-2)\begin{vmatrix}1&b&-2\\0&a-b&b+2\\0&-(b+2)&a-b\end{vmatrix}=(a+b-2)[(a-b)^2+(a+2)(b+2)]$. De aici, $2A=(a+b-2)[2(a-b)^2+2ab+4a+4b+8]=(a+b-2)\cdot[(a-b)^2+a^2-2ab+b^2+2ab+4a+4b+4+4]=(a+b-2)[(a-b)^2+(a+2)^2+(b+2)^2]$; b) Alegând în $A$, $a=2012$, $b=-2010$, găsim $2B=\begin{vmatrix}2012&-2010&-2\\-2&2012&2010\\-2010&-2&2012\end{vmatrix}=(2012-2010-2)[2^2+2014^2+2008^2]=0$; c) Folosind din nou punctul a), alegând în $A$, $a=x^2$, $b=x$, găsim $2c=0$, echivalent cu $0=(x^2-x-2)[(x^2-x)^2+(x^2+2)^2+(x+2)^2]$, de unde $x^2-x-2=0$ cu $x\in\{-1,2\}$. **2.** a) $\hat{x}*\hat{y}=\hat{x}+\hat{y}-\hat{2}=\hat{y}+\hat{x}-\hat{2}=\hat{y}*\hat{x}$, $(\forall)\ \hat{x},\hat{y}\in\mathbb{Z}_{10}$; b) $\hat{x}*\hat{e}=\hat{x}+\hat{e}+\hat{2}=\hat{x}$, de unde $\hat{e}=\hat{8}$; c) $\hat{x}*(\hat{y}*\hat{z})=(\hat{x}*\hat{y})*\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}+\hat{4}$. **III. 1.** a) Din $y=2$ asimptotă orizontală la $+\infty$ pentru graficul lui $f$, deducem $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$, de unde $a=2$; b) Avem $f'(x)=-\frac{4}{(x-1)^2}<0$, $(\forall)\ x\in(1,\infty)$, de unde $f$ strict descrescătoare pe $(1,\infty)$; c) Cum $3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ și din b) $f$ strict descrescătoare, evident, $f(3\sqrt{2})<f(2\sqrt{3})$. **2.** a) $\int_0^1 f(x)e^{-\frac{x}{2}}dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(e\sqrt{e}-1)$; b) $\mathcal{V}=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1 xe^x dx=\pi\left[xe^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1\right]=\pi$; c) Din $e^{\frac{x}{2}}\leq\sqrt{e}$, $(\forall)\ x\in[0,1]$, și $e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}\leq\sqrt{e}\cdot\sqrt{x}$, de unde $\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}\sqrt{x}\,dx\leq\sqrt{e}\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\sqrt{e}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{e}}{3}$, adică $\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{2\sqrt{e}}{3}$.





## Testul 14*

**I. 1.** Avem $a_7=\frac{a_3+a_{11}}{2}=7$. **2.** Avem $f(2-t)=(2-t)^2-4(2-t)+3=(2-t)^2+4t-5=(2+t)^2-4t-5=(2+t)^2-4(t+2)+3=f(t+2)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$. **3.** Pentru $x\in(-48,\infty)$ avem soluția $x=2$. **4.** 200 lei. **5.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=0$, deci $\overrightarrow{OB}+a\cdot\overrightarrow{OD}=0$. Cum și $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=0$, obținem $a=1$. **6.** Avem $\frac{BC}{\sin\sphericalangle A}=\frac{AC}{\sin\sphericalangle B}$, adică $\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{AC}{\frac{1}{2}}$, de unde $AC=3$. **II. 1.** a) Avem $A_1(1,1)$, $A_2(2,4)$, de unde ecuația dreptei $A_1A_2$ va fi $3x-2y-2=0$; b) $\Delta=ab^2+bc^2+ca^2-b^2c-ac^2-ba^2=ca(a-c)+b^2(a-c)-b(a^2-c^2)=(a-c)(ac+b^2-ab-ac)=(a-b)(b-c)(c-a)$; c) Notând $\mathcal{A}$ = aria triunghiului $A_1A_2A_n$ obținem că $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1^2&1\\2&2^2&1\\n&n^2&1\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{2}(1-2)(2-n)(n-1)\right|=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$. Apoi $(n-2)(n-1)=90$, de unde $n=11$. **2.** a) $4^3=64$; b) $h=\hat{2}x^2+\hat{3}$; c) $g^2(x)=x^2+\hat{2}x+\hat{1}$, de unde $g\in M$. **III. 1.** a) $f'(x)=12x^3+48x^2+48x=12x(x^2+4x+4)=12x(x+2)^2$; b) Punctele critice sunt soluțiile ecuației $f'(x)=0$. Găsim $x\in\{-2,0\}$. Singurul punct extremal este cel de abscisă $x=0$, adică punctul de minim $M(0,1)$; c) Din b) avem $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>1$, $\forall\ x\neq 0\Rightarrow f(0{,}01)+f(-0{,}02)+\ldots+f(-0{,}10)\geq\underbrace{1+1+\ldots+1}_{10\text{ ori}}$. **2.** a) $I_1=\int_e^{e^2}x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^{e^2}-\frac{x^2}{4}\Big|_e^{e^2}=\frac{e^2\left(3e^2-1\right)}{4}$; b) $I_{-1}=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}$; c) Pentru

$x \in [e, e^2]$ evident $x^n \ln x > 0$, de unde $\int_e^{e^2} x^n \ln x dx > 0$, adică $I_n > 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}^*$.

## Testul 15*

**I. 1.** Avem $1 - \lg 2 > \frac{3\lg 2 + \lg 3}{2}$, adică $2 > \lg 48$ sau $\lg 100 > \lg 48$, inegalitate evidentă. **2.** Obținem $(x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2 = 4 + 2 - 4 + 2 = 4$. **3.** $x = 8$. **4.** $n = 5$. **5.** Coeficientul unghiular al dreptei $d$ este $m = -1$. Imediat, ecuația: $x - y - 1 = 0$. **6.** $\sin B = \frac{3}{5}$. **II. 1.** a) Simplă verificare; b) $z = 2$ soluție conduce la $x = 1, y = 1$, de unde $a = \frac{1}{2}$; c) Obținem $x + y = 3$, de unde, pentru $a \neq 0$, $z_0 = 0$ soluție. Imediat $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, de unde $x_0^2 + y_0^2 + 2012 \cdot z_0^2 = 4 + 1 + 0 = 5$. **2.** a) $f(z) = 2^{2012} - 2 \cdot 2^{2011} - a \cdot 2^2 + 4a - a + 2^{2010} = 2^{2010} - a$; b) Din $f(2) = r$, unde $r$ este restul împărțirii lui $f$ la $x - 2$, găsim folosind a) $2^{2010} - a = 2^{2010}$, de unde $a = 0$; c) $f(x) = x^{2011}(x-1) - x^{2010}(x-1) - ax(x-1) + a(x-1) = (x-1)(x^{2011} - x^{2010} - ax + a) = (x-1)[x^{2010}(x-1) - a(x-1)] = (x-1)^2[x^{2010} - a]$, de unde concluzia. **III. 1.** a) $f'(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x$; b) $\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \; f'(-1) = 0$; c) Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = -2$, care se dovedesc a fi puncte de extrem conform tabelului de variație. **2.** a) $F(x) = \int f(x)dx = x^3 + x^2 + x + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $\lim_{x \to \infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{2012x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x^2 + x}{2012x^3} = \frac{1}{2012}$;

c) $\int_0^a f(t)dx = 8$, de unde $a^3 + a^2 + a - 16 = 0$ sau $a^3 - 8 + a^2 - 4 + a - 2 = 0$. Imediat, $(a-2)(a^2 + 3a + 7) = 0$, de unde $a = 2$.



# Bibliografie


1. Brânzei D., Zanoschi A. – *Probleme cu vectori*, Editura Paralela 45, Pitești, 1999
2. Chiriac V., Chiriac M., Cozma D., Șova A. – *Probleme de matematică, fizică, chimie, date la concursul de admitere în treapta a II-a de liceu*, Editura Academiei, București, 1987
3. Demidovich B. *et al.* – *Problems in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1976
4. Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O. – *Probleme de matematică pentru clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, Pitești, 2011
5. Dragomir L., Dragomir A., Bădescu O. – *Probleme de matematică pentru clasa a X-a*, Editura Paralela 45, Pitești, 2012
6. Ganga M. – *Elemente de analiză matematică pentru clasa a XI-a*, Editura Mathpress, 1997
7. Monea M., Monea S., Zanoschi A., Șerdean I. – *Bacalaureat 2013. Matematică M_st-nat, M_tehnologic*, Editura Paralela 45, Pitești, 2013
8. Năstăsescu C., Niță C., Brandiburu M., Joiță D. – *Culegere de probleme pentru liceu*, Editura Rotech Pro, 1997
9. Panaitopol M.E., Radu G., *Matematică – culegere de probleme, clasa a XI-a: subiecte date la admiterea în învățământul superior și bacalaureat*, Editura Europontic, Cluj-Napoca
10. Savu I. – *Bacalaureat la matematică 2008*, Books Unlimited Publishing, 2008
11. Stănășilă O., Popescu I., Cornea F. (coord.) – *Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învățământul superior*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989
12. Zanoschi A., Iurea G., Popa G., Răducanu P., Șerdean I. – *Bacalaureat 2013. Matematică M_mate-info*, Editura Paralela 45, Pitești, 2013
13. *** – Subiectele și variantele de bacalaureat publicate de Ministerul Educației Naționale între anii 1998 și 2014

# Cuprins


*Cuvânt-înainte* ..... 4

Enunțuri Soluții

**TEME RECAPITULATIVE**

**Clasa a IX-a**

1. Mulțimi și elemente de logică matematică ..... 5 ..... 228
2. Șiruri. Progresii ..... 10 ..... 229
3. Funcții ..... 14 ..... 230
4. Funcția de gradul I ..... 20 ..... 230
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea ..... 24 ..... 231
6. Vectori în plan ..... 29 ..... 232
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie ..... 33 ..... 233

**Clasa a X-a**

1. Numere reale ..... 39 ..... 234
2. Funcții și ecuații ..... 43 ..... 234
3. Probleme de numărare și combinatorică ..... 49 ..... 235
4. Matematici aplicate. Probabilități ..... 53 ..... 236
5. Geometrie analitică ..... 57 ..... 237
6. Numere complexe* ..... 62 ..... 237

**Clasa a XI-a**

1. Matrice ..... 66 ..... 238
2. Determinanți ..... 72 ..... 239
3. Aplicații ale determinanților în geometrie ..... 76 ..... 239
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale ..... 80 ..... 240
5. Sisteme de ecuații liniare ..... 85 ..... 241
6. Probleme de sinteză – algebră ..... 91 ..... 242
7. Limite de funcții. Asimptote ..... 94 ..... 244
8. Funcții continue ..... 99 ..... 245
9. Derivata unei funcții ..... 104 ..... 245
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor ..... 110 ..... 246
11. Probleme de sinteză – analiză matematică ..... 113 ..... 247

**Clasa a XII-a**

1. Legi de compoziție ..... 117 ..... 248
2. Structuri algebrice. Morfisme ..... 121 ..... 249
3. Polinoame ..... 126 ..... 249
4. Probleme de sinteză – algebră ..... 132 ..... 250
5. Primitive ..... 136 ..... 251
6. Integrala definită ..... 141 ..... 252
7. Aplicații ale integralei definite ..... 145 ..... 253
8. Probleme de sinteză – analiză matematică ..... 150 ..... 254

**TESTE PENTRU BACALAUREAT 2015, DUPĂ MODELUL M.E.N.**

**1. Subiecte propuse la proba de matematică a examenului de Bacalaureat în perioada 2009-2014** ..... 155 ..... 256
**2. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat 2015** ..... 198 ..... 276
**3. Modele de teste propuse pentru examenul de Bacalaureat 2015** ..... 216

*Bibliografie* ..... 285